

2011

# KONCEPCJA BADAŃ STANU I WYNIKÓW PRZEDSIĘBIORSTW DLA POTRZEB INSTRUMENTU SZYBKIEGO REAGOWANIA

Opracowanie projektowe:

## 1. Założenia rozwiązania „**System Wczesnego Ostrzegania**”

1.1. Metody i narzędzia monitorowania gospodarki  
w komponencie mikroekonomicznym

(Zadanie 1, Etap 6, Cykl 1)

oraz

1.1. Metody i narzędzia monitorowania gospodarki  
w komponencie makroekonomicznym

(Zadanie 1, Etap 7, Cykl 1)

*Małopolska Szkoła Administracji  
Publicznej Uniwersytetu Ekonomicznego  
w Krakowie*

Kraków, 25 maja 2011 r.

## Spis treści

<b>UWAGI WPROWADZAJĄCE .....</b>	<b>4</b>
<b>CZĘŚĆ I. KOMPONENT MIKROEKONOMICZNY.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1. ISTOTA SYSTEMÓW WCZESNEGO OSTRZEGANIA.....</b>	<b>9</b>
1.1.1. Cel badań w ramach Systemu Wczesnego Ostrzegania .....	9
1.1.2. Charakter Systemu Wczesnego Ostrzegania .....	9
1.1.3. Kryteria identyfikacji sygnałów ostrzegawczych .....	10
1.1.4. Rezultaty zastosowania Systemu Wczesnego Ostrzegania .....	10
<b>1.2. ZAKRES BADANIA.....</b>	<b>11</b>
1.2.1. Podmiot badań i ich periodyzacja .....	11
1.2.2. Zasilenie informacyjne Systemu Wczesnego Ostrzegania .....	11
<b>1.3. PODSTAWOWE ETAPY POSTĘPOWANIA BADAWCZEGO .....</b>	<b>12</b>
<b>1.4. GŁÓWNE RODZAJE I GRUPY NARZĘDZI ANALITYCZNYCH .....</b>	<b>12</b>
<b>1.5. OKREŚLENIE ZBIORÓW DANYCH I METOD ICH ANALIZY .....</b>	<b>16</b>
1.5.1. Metody analizy jednowymiarowej .....	17
1.5.2. Metoda analizy składowych głównych PCA .....	19
1.5.3. Metody analizy skupień.....	20
<b>1.6. METODY TWORZENIA I ANALIZY ZBIORU ZINTEGROWANEGO .....</b>	<b>23</b>
1.6.1. Metody porządkowania liniowego.....	24
<b>1.7. SCHEMATY BADAWCZE SWO – KOMPONENT MIKROEKONOMICZNY .....</b>	<b>26</b>
<b>1.8. PODSTAWOWE METODY I NARZĘDZIA ANALIZY STANU I WYNIKÓW SEKTORA PRZEDSIĘBIORSTW DLA POTRZEB SWO .....</b>	<b>29</b>
1.8.1. Analiza zmian strukturalnych oraz zjawiska upadłości przedsiębiorstw .....	29
1.8.2. Zmiany potencjału i wyników ekonomiczno-finansowych przedsiębiorstw .....	39
1.8.3. Analiza poziomu syntetycznego miernika rozwoju .....	56
1.8.4. Koncepcja pasm strategicznych.....	62
1.8.5. Konstrukcja modeli predykcji upadłości przedsiębiorstw .....	66
1.8.6. Prospektywna ocena zmiany stopnia zagrożenia upadłością .....	76
<b>1.9. LITERATURA .....</b>	<b>80</b>
<b>1.10. ZAŁĄCZNIKI.....</b>	<b>84</b>
Załącznik 1.1. Struktura raportu badawczego – komponent mikroekonomiczny.....	84

<b>CZĘŚĆ II. KOMPONENT MAKROEKONOMICZNY .....</b>	<b>86</b>
Wprowadzenie .....	86
<b>2.1. PROPOZYCJA FORMALNO-STATYSTYCZNEGO MODELOWANIA WAHAŃ AKTYWNOŚCI GOSPODARCZEJ .....</b>	<b>88</b>
2.1.1.    Procesy stochastyczne prawie okresowo skorelowane – podstawowe własności .....	90
2.1.2.    Estymacja procesów POS z wykorzystaniem metod podpróbkiowania .....	93
2.1.3.    Propozycja czterostopniowej procedury ekstrakcji cyklu koniunkturalnego .....	95
<b>2.2. WYKORZYSTANIE UJĘCIA BAYESOWSKIEGO W KRÓTKOOKRESOWYM PROGNOZOWANIU WSKAŹNIKÓW MAKROEKONOMICZNYCH.....</b>	<b>106</b>
2.2.1.    Bayesowskie prognozy wskaźników makroekonomicznych z wykorzystaniem modeli jednowymiarowych .....	106
2.2.2.    Bayesowska prognoza koniunktury na podstawie modelu z wahaniami cyklicznymi	113
<b>2.3. MODELE DLA WIELOWYMIAROWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH W ANALIZIE SCENARIUSZY SZOKOWYCH .....</b>	<b>120</b>
2.3.1.    Modele VAR i VECM idea kointegracji i zastosowanie .....	120
2.3.2.    Estymacja parametrów modeli VAR i VECM Metodą Największej Wiarygodności .....	123
2.3.3.    Estymacja parametrów modeli VAR i VECM w ujęciu bayesowskim .....	124
2.3.4.    Wykorzystanie bayesowskich modeli VAR i VECM w prognozowaniu .....	129
2.3.5.    Ilustracja empiryczna.....	131
<b>2.4. LITERATURA .....</b>	<b>137</b>
<b>2.5. ZAŁĄCZNIKI .....</b>	<b>140</b>
Załącznik 2.1. Struktura raportu badawczego – komponent makroekonomiczny.....	140

## UWAGI WPROWADZAJĄCE

Opracowanie zawiera opis narzędzi wykorzystywanych w ramach Etapów 6. oraz 7. projektu ISR oraz integracji rezultatów osiąganych w komponentach „mikro” i „makro” systemu. Podstawowym kryterium doboru powyższego instrumentarium była jego skuteczność w realizacji głównego celu tej fazy zadania, tzn. identyfikacji, lokalizacji i określenia skali ryzyka wystąpienia zaburzeń ekonomicznych – tak w funkcjonowaniu całej gospodarki, jak i w przekrojach i subagregatach, w tym na poziomie pojedynczych firm – których charakter wymagałby uwagi/reakcji polityki gospodarczej.

Zgodnie z wymogami projektu jednym z podstawowych założeń konstrukcji systemu była tzw. formuła „od dołu”, biorąca za punkt wyjścia badanie sytuacji pojedynczych przedsiębiorstw i ich grup (agregatów, obejmujących też sektory), a więc ujęcie mikroekonomiczne, i wykorzystująca te rezultaty jako przesłanki analizy na wyższych poziomach uogólnienia – w tym na szczeblu makroekonomicznym. W ramach takiego podejścia analizy mikroekonomiczne są podstawą budowy tzw. komponentu monitorowania. Jego podstawowym zadaniem jest zarówno ujawnienie – w różnych strukturach i przekrojach, a także w formach zagregowanych na przestrzeni dłuższego okresu obserwacji (szeregi czasowe) – symptomów pogarszającej się sytuacji finansowej poszczególnych przedsiębiorstw, w tym wskazujących na możliwość upadłości, jak i analiza czynników sprawczych tych zagrożeń oraz przewidywanie wpływu ich zmian na przyszłe kształtowanie się tych ryzyk. Sprzężenie wyników mikroekonomicznych z rezultatami bloku makro pozwala m.in. na dokonanie całościowej analizy stanu gospodarki, w tym ocenę jej stanu i lokalizację obszarów występowania zagrożeń, ale jest też jedną z przesłanek weryfikacji spójności całego systemu.

Kolejną przesłanką doboru opisywanego zbioru narzędzi jest jego dostosowanie zarówno do specyfiki polskiej gospodarki, jak i do charakteru oraz zakresu dostępnych danych. Trzeba tu wskazać na kilka ważnych zagadnień. Przede wszystkim należy pamiętać, że narzędzia mają służyć badaniu gospodarki o stosunkowo krótkiej historii wolnorynkowej i w dodatku w fazie poakcesyjnej do UE, a także w okresie „doganiania” gospodarek rozwiniętych. Kolejną okolicznością wymagającą uwzględnienia jest też to, że gospodarka światowa wciąż znajduje się w fazie poważnych turbulencji ekonomicznych. Wymienione tu czynniki komplikują budowę SWO – tak w komponentie makro, jak i mikroekonomicznym. W przypadku pierwszego, trzeba przede wszystkim mówić o krótkich szeregach czasowych, niestabilności strukturalnej i parametrycznej funkcji opisujących zachowanie gospodarki, wątpliwej jakości części danych. Stawia to szczególnie wysokie wymagania narzędziom makro i faktycznie – takie zaawansowane instrumenty zostały zastosowane. Wymienić tu należy, m.in. nowatorskie podejście do badania i prognozowania cykli gospodarczych, oparte na teorii funkcji prawie-okresowych i procesów prawie-okresowo skorelowanych (POS), czy szerokie wykorzystywanie metod bayesowskich.

Z kolei w przypadku narzędzi mikro, uwarunkowania te prowadzą do preferencji metod, które nie wymagają tzw. „grubszych” paneli danych, opartych na długiej historii obserwacji podmiotów. Brak takich danych co najmniej utrudnia wykorzystywanie podejść bazujących na funkcjach ryzyka (*hazard functions*), w które stosunkowo łatwo też *explicite* wpleść typowe zmienne makroekonomiczne. Istotne zmiany w funkcjonowaniu gospodarki powodują też, że w grupie narzędzi mikro/mezo- ważną rolę odgrywają procedury związane z analizami czynników strukturalnych. W dynamicznej gospodarce istotne znaczenie mają też badania związane z tzw. demografią firm. W proponowanym instrumentarium rolę taką może spełniać m.in. analiza pasm strategicznych. W przypadku analiz mikro warto też pamiętać, że w sytuacji ograniczonego dostępu do danych lub danych słabszej jakości, różne narzędzia oceny sytuacji przedsiębiorstwa, w tym możliwości jego bankructwa, mogą dawać nie zawsze identyczne lub w pełni wiarygodne rezultaty. Świadomość istnienia takich uwarunkowań spowodowała, że w instrumentarium mikroekonomicznym uwzględniono nie tylko szereg alternatywnych podejść, ale przewidziano też narzędzia i procedury klasyfikacji w oparciu o przesłanki wielokryterialne.

Drugim problemem związanym z danymi jest brak w systemie statystycznym niektórych szeregów czasowych. Dotyczy to m.in. tak istotnego, z punktu widzenia celów programu, jak ogólnogospodarcza stopa bankructw. W ramach zastosowanej metodologii konieczne było więc wykorzystanie narzędzi, umożliwiających budowę modeli ze zmiennymi wprost nieobserwowalnymi (*latent*), a jedynie przybliżającymi badane zjawisko (*proxies*).

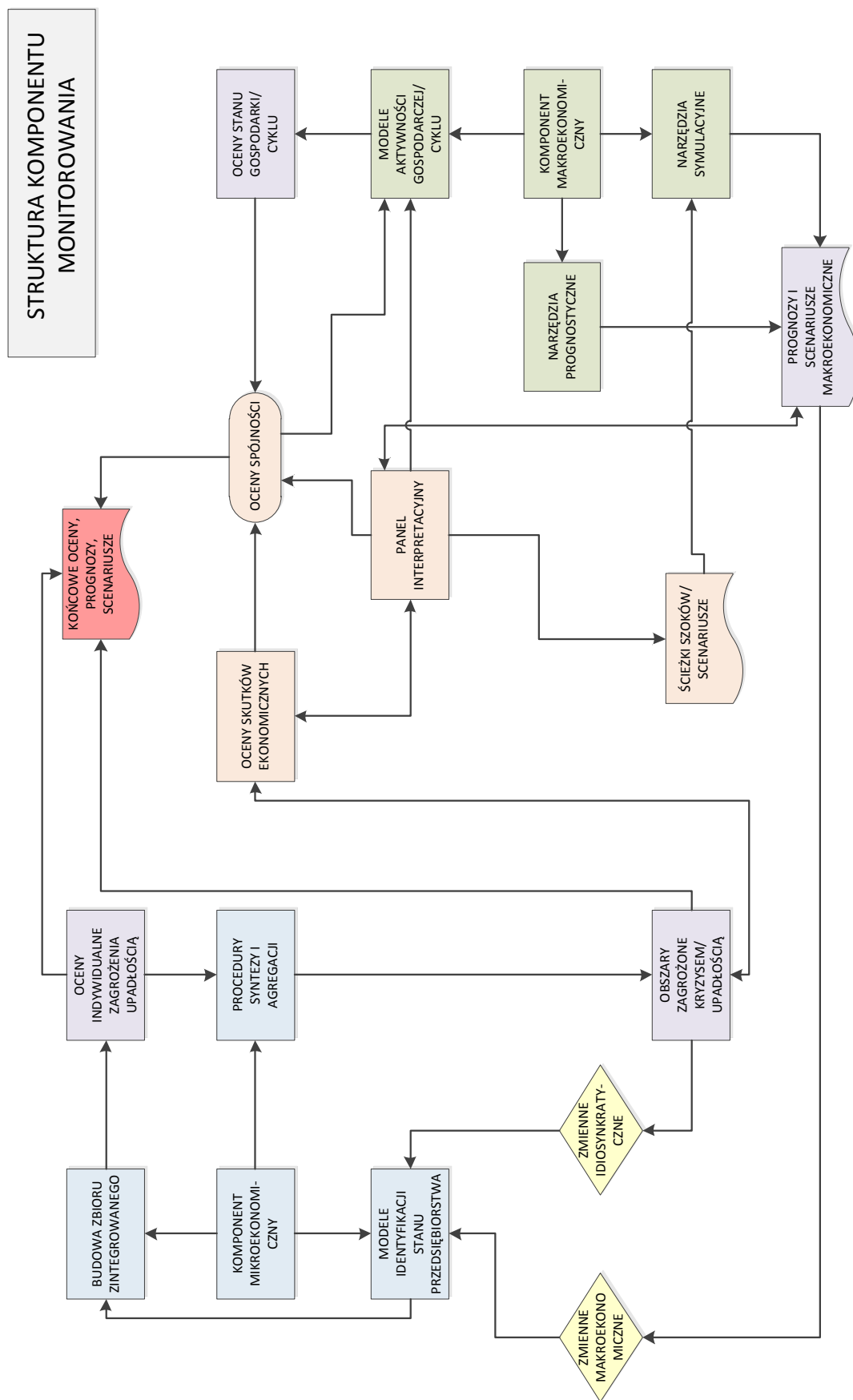
Trzecim źródłem ograniczeń, mających wpływ na przyjęte rozwiązania metodologiczne, są problemy związane z limitowaniem dostępu do informacji jednostkowych o podmiotach gospodarczych, wynikające z realizacji przepisów o ochronie tajemnicy statystycznej i uregulowań pokrewnych. Bariery te sprawiają, że przeprowadzenie części analiz mikroekonomicznych może być utrudnione. Ryzyko takie spowodowało, że blokowi makro nadano wysoki stopień autonomii, polegającej na możliwości jego elastycznego, w zależności od dostępnych danych jednostkowych, sprzęgania z blokiem mikro, i w pewnym zakresie – substytucyjności. W rezultacie, w ramach bloku makro istnieją „samoistne” możliwości analizowania i prognozowania agregatów ekonomicznych różnego rodzaju; m.in. w oparciu o modele typu VAR, VECM i procedury bayesowskiego łączenia wiedzy, choć konfrontacja tych rezultatów z wynikami uzyskiwanymi z bloku mikro, szczególnie w ramach podejścia „od dołu”, jest zawsze pożądana i w ramach przyjętego tu podejścia – możliwa.

Kolejną przesłanką doboru narzędzi, tak bloku mikro, jak i makro, była zasada szybkości uzyskiwania rezultatów – bardzo ważna w systemach eksperckich; zwłaszcza służących podejmowaniu dynamicznych decyzji gospodarczych. Zdecydowanie przemawiała ona na korzyść podejść typu VAR; przede wszystkim w stosunku do rozbudowanych modeli makroekonomicznych, wymagających częstych reestymacji, wielu korekt eksperckich etc.

W ramach przeglądu przesłanek doboru instrumentarium warto podkreślić, że wszystkie wykorzystywane tu narzędzia „techniczne” spełniają warunek algorytmizacji – tzn.

są oprogramowane w taki sposób, że możliwe jest ich niezwłoczne i powtarzalne użycie. W ich prezentacji w niniejszym opracowaniu starano się też przestrzegać zasady pogłębioności, polegającej na pogłębionym i wzbogaconym o praktyczne przykłady opisie wykorzystywania tych z nich, które są wysoko specjalistyczne i nowatorskie.

Mówiąc o doborze instrumentów analiz mikro i makro należy też zwrócić uwagę na jeszcze jeden, bardzo ważny, aspekt tego zagadnienia – kwestię integracji obu tych obszarów. Jej niezbędność wynika z kilku powodów. Po pierwsze, zagrożenia stabilności systemu gospodarczego mogą mieć zarówno charakter mikro-, jaki i makroekonomiczny. Stosowane narzędzia muszą zatem służyć analizom w obu tych sferach; jest to jednak najślabszy, choć konieczny, warunek integracji. Po drugie, pomiędzy szokami mikro- i makro mogą występować współzależności. Kryzys gospodarczy potwierdził, że obecnie nie ma praktycznie izolowanych sfer – tak w rozumieniu terytorialnym, jak i podmiotowym. Pokazał on też dodatkowo, że zdarzenia jednostkowe mogą prowadzić do kryzysu ogólnosystemowego. Po trzecie, doświadczenia kryzysu unaocniły też istnienie ogólnosystemowych czynników, zwiększających wrażliwość poszczególnych podmiotów na szoki – określanych mianem tzw. *fragility*. Warto przypomnieć, że w okresie przedkryzysowym kwestia wpływu uwarunkowań zewnętrznych na bankructwo pojedynczych firm bywała przedmiotem dyskusji – dotyczących i samego faktu, ale także rodzaju istotnych zmiennych makroekonomicznych i kierunków ich wpływu. Obecnie zagadnienie wydaje się bardziej jednoznaczne. Badanie mikroekonomiczne nie może zatem abstrahować od uwarunkowań ogólnogospodarczych, choć warto też zwrócić uwagę na fakt, że włączenie zmiennych makroekonomicznych do mikroekonomicznych modeli firm napotyka na szereg trudności co sprawia, iż poszukiwać tu należy różnych rozwiązań, wśród których rola narzędzi eksperckich jest istotna. Po czwarte, jednym z warunków kompatybilności podejść mikro i makro jest praca na porównywalnych zbiorach informacji, w tym w zakresie horyzontu czasowego i częstości danych.



Podstawową sieć powiązań pomiędzy blokami mikro i makro w ramach komponentu monitorowania przedstawia powyższy schemat. Warto zauważyć, że powiązania te mają zarówno charakter bezpośredni, jak i pośredni. Formą bezpośrednią może być obecność *explicite* zmiennych makroekonomicznych w modelach identyfikacji stanu przedsiębiorstwa komponentu mikroekonomicznego. Form pośrednich jest więcej. Z jednej strony agregacja (w różnych przekrojach) ocen indywidualnych zagrożenia upadłością/trudnej sytuacji ekonomicznej, dokonywana w ramach bloku mikro, pozwala na określenie obszarów zagrożenia. Wyniki te mogą być następnie konfrontowane/weryfikowane (m.in. w ramach tzw. oceny spójności) z rezultatami makroekonomicznego oglądu gospodarki. Z drugiej strony, rezultaty te same mogą być wykorzystywane na etapie modelowania makroekonomicznego. Trzeba też zauważyć, że wiedza na temat obszarów zagrożonych (np. dotycząca złej sytuacji określonej branży) może być uwzględniana na etapie identyfikacji wpływu zmiennych idiosynkratycznych (mikroekonomicznych, specyficznych dla firmy) na jej sytuację ekonomiczną.

Schemat pokazuje również znaczenie specyficznego „instrumentu” w całym systemie, jakim jest tzw. panel interpretacyjny. Jest to zespół sześciu niezależnych, wybitnych ekspertów, których zadaniem jest m.in.: ocena wyników prac zespołów mikro i makro, w tym ich spójności, wskazywanie głównych tendencji w gospodarce, analiza obszarów niepewności, identyfikacja szoków ekonomicznych. Przyjmuje się, że prace panelu interpretacyjnego mają charakter iteracyjny, gdyż przewiduje się dwie rundy oceny rezultatów prac w blokach mikro i makro przez to gremium – pierwotną oraz wtórną (dotyczącą rezultatów wykorzystania w ramach tych bloków wskazań wynikających z oceny pierwotnej). Takie określenie roli tego panelu powoduje, że ostateczne rezultaty, osiągnane w ramach komponentu monitorowania, są wszechstronnie ocenione i uzupełnione wiedzą ekspercką.



### 1.1. ISTOTA SYSTEMÓW WCZESNEGO OSTRZEGANIA

#### 1.1.1. CEL BADAŃ W RAMACH SYSTEMU WCZESNEGO OSTRZEGANIA

Ze względu na określoną funkcję komponentu monitorowania gospodarki w ujęciu mikroekonomicznym, w postaci bieżącego analizowania i diagnozowania sytuacji przedsiębiorstw, podejmowane badania w zakresie monitorowania stanu przedsiębiorstw z zastosowaniem *Sytemu Wczesnego Ostrzegania*, posiadają zdefiniowany wielopoziomowy cel:

- **ujawnienie symptomów pogarszającej się sytuacji**, w tym zwłaszcza
- **zagrożenia utraty płynności finansowej**, a w dalszej kolejności
- **wskazanie na symptomy zagrożenia upadłością**, a następnie w wyniku wnioskowania przeprowadzenie,
- **analizy czynników zagrożenia** oraz
- **przewidywanie zmiany stopnia zagrożenia przedsiębiorstw upadłością**.

#### 1.1.2. CHARAKTER SYSTEMU WCZESNEGO OSTRZEGANIA

Projektowany *System Wczesnego Ostrzegania (SWO)*, właściwy dla monitorowania stanu przedsiębiorstw, co do rodzaju (charakteru, metod, stosowanego podejścia) charakteryzuje się następującymi cechami:

- ma za zadanie ujawnienie pogarszającej się sytuacji przedsiębiorstw, a w szczególności wychwycenie elementów wskazujących na zagrożenie upadłością,
- służy do rozróżniania przedsiębiorstw o słabej/złej (zagrożenie upadłością) oraz zadawalającej kondycji,
- nie jest systemem prognozującym upadłość,
- zidentyfikowane sygnały ostrzegawcze odczytywane będą jako składowa prognozy ostrzegawczej,
- ujawnienie zagrożeń powinno nastąpić z założonym rocznym wyprzedzeniem (rozwiązanie kroczące analiz kwartalnych/półrocznych),
- definicja przedsiębiorstwa upadłego wyznaczona jest czynnikami ekonomiki funkcjonowania przedsiębiorstwa, w powiązaniu z ujęciem prawnym.

---

### 1.1.3. KRYTERIA IDENTYFIKACJI SYGNAŁÓW OSTRZEGAWCZYCH

W zakresie prowadzonych analiz w ramach przyjętych ścieżek badawczych, dla identyfikacji silnych bądź słabych sygnałów ostrzegawczych, stosowane będzie podejście eksperckie oraz z obszaru analizy statystycznej (główne narzędzia przedstawione są w rozdziale 1.8):

- średnie branżowe – pochodzące z analizy zasobu informacji zasilających oraz dostępne z analiz zewnętrznych,
- przedziały wzorcowe – uwzględniające prawidłowości ekonomiczne oraz związki przyczynowo–skutkowe,
- wielkości krytyczne – zdefiniowane jako silne sygnały ostrzegawcze,
- wartość funkcji dyskryminacyjnej – porównywana z wartością graniczną właściwą dla danego modelu,
- dopuszczalne górne i dolne poziomy zmienności i stabilności odchyłeń – wyznaczone na podstawie wielkości średnich, przy przyjętych poziomach wiarygodności (możliwe jako granice górne/dolne, zewnętrzne/wewnętrzne).

---

### 1.1.4. REZULTATY ZASTOSOWANIA SYSTEMU WCZESNEGO OSTRZEGANIA

Opracowanie wyników z monitorowania stanu przedsiębiorstw (komponent mikroekonomiczny) z zastosowaniem *Sytemu Wczesnego Ostrzegania*, pozwolić powinno na zakwalifikowanie aktualnej sytuacji przedsiębiorstw, na podstawie prowadzonej analizy ich zbiorowości z zastosowaniem projektowanych narzędzi, do jednej z następujących kategorii (sytuacji):

1. podmiot niezagrożony upadłością – dobry stan kondycji ekonomiczno-finansowej,
2. podmiot o sytuacji niejednoznacznie wskazującej na zagrożenie upadłością – brak jednoznacznego rozstrzygnięcia w zakresie kondycji ekonomiczno-finansowej,
3. podmiot zagrożony upadłością – zły stan kondycji ekonomiczno-finansowej.

Projektowanym docelowym rozwiązaniem w zakresie funkcjonowania *Systemu Wczesnego Ostrzegania* będzie ocena możliwości wskazania dynamiki zmian liczby podmiotów (w ujęciu bezwzględnym i względnym) zmieniających stan swojej aktywności ekonomicznej, ze stanu stabilizacji (rozwoju), poprzez stan osłabienia dynamiki rozwojowej, następnie stan stagnacji, do stanu zagrożenia:

- rozwój i stabilizacja – brak symptomów zagrożenia w większości przedsiębiorstw,
- osłabienie dynamiki – pojawiające się wczesne (słabe) sygnały ostrzegawcze,
- stagnacja – wśród rozpoznanych słabych sygnałów, pojawiają się sygnały silne,

- zagrożenie – wystąpienie znacznej liczby (intensywności) sygnałów silnych.

## 1.2. ZAKRES BADANIA

### 1.2.1. PODMIOT BADAŃ I ICH PERIODYZACJA

Badaniem objęte zostaną jednostki statystyczne, zaliczane zgodnie z definicją statystyki publicznej (GUS) do sektora przedsiębiorstw niefinansowych. Przyjęty kwartalny okres periodyzacji badań, oznacza objęcie analizą przedsiębiorstwa o liczbie pracujących od 50 osób, natomiast możliwa periodyzacja półroczna objęłaby dodatkowo przedsiębiorstwa o liczbie pracujących 10-49 osób.

Podstawowy układ klasyfikacyjny obejmie dwa poziomy: sekcje (litera – 21 pozycji) oraz działy (OX – 88 pozycji), z możliwym dalszym rozszerzeniem, przy uwzględnieniu identyfikacji stopnia utraty informacji przy przechodzeniu na niższe poziomy klasyfikacji.

Analiza zgodnie z przyjętym sposobem periodyzacji prowadzona będzie od 2007 roku przez okres 36 miesięcy (periodyzacja kwartalna), z przyjęciem IV kwartału 2010 roku jako okresu odniesienia dla pierwszego raportu badawczego.

### 1.2.2. ZASILENIE INFORMACYJNE SYSTEMU WCZESNEGO OSTRZEGANIA

Dla właściwego funkcjonowania *Systemu Wczesnego Ostrzegania*, szczególnie znaczenie posiada sposób, zakres i szybkość zasilenia w informacje i dane liczbowe odpowiednie dla przeprowadzenia analiz z zastosowaniem przyjętych ścieżek i metod badawczych.

Dla danych liczbowych charakteryzujących stan i wyniki przedsiębiorstw objętych badaniem przyjmuje się na obecnym etapie prac zasilenie z systemu statystyki publicznej. Wykorzystane zatem zostaną informacje pochodzące ze sprawozdań: kwartalnych i półrocznych (F-01/I-01). Ograniczona dostępność danych indywidualnych jest czynnikiem wpływającym negatywnie na tworzenie narzędzi badawczych (możliwości dokonywania naliczeń i przetwarzania danych przez dysponenta bazy statystycznej).

Dla celów analizy i charakterystyki zbioru przedsiębiorstw wykorzystane będą informacje ze zmodyfikowanej bazy REGON (podmioty aktywne i nieaktywne) oraz możliwe do pozyskania informacje pochodzące z Monitora Sądowego i Gospodarczego. Ponadto wykorzystane zostaną bazy o dostępie publicznym, jako uzupełniające informacje dotyczące przedsiębiorstw w różnych przekrojach klasyfikacyjnych, w tym także bazy komercyjne z zachowaniem celu prowadzonych analiz dla potrzeb naukowych.

### 1.3. PODSTAWOWE ETAPY POSTĘPOWANIA BADAWCZEGO

Przyjęte główne etapy prowadzonego postępowania badawczego w ramach komponentu mikroekonomicznego *Systemu Wczesnego Ostrzegania*, obejmują:

- specyfikacja danych liczbowych zasilających (zakres czasowy, podmiotowy, przedmiotowy),
- weryfikacja dostępnego zasobu informacji zasilających,
- zdefiniowanie wynikowej konstrukcji modelu badawczego,
- weryfikacja i dobór szczegółowych narzędzi badawczych,
- zasilenie informacyjne i przetwarzanie wstępne danych liczbowych,
- zdefiniowanie kryteriów identyfikacji sygnałów ostrzegawczych,
- przetwarzanie danych liczbowych z zastosowaniem algorytmów dla narzędzi badawczych w celu identyfikacji sygnałów ostrzegawczych,
- klasyfikacja podmiotów według ich stanu i ścieżek analitycznych (grupowanie),
- analiza i ocena wyników klasyfikacji podmiotów (ujęcie izolowane),
- tworzenie zbioru zintegrowanego (zintegrowana reguła decyzyjna),
- analiza zbioru zintegrowanego i systematyzacja przedsiębiorstw,
- identyfikacja zależności układu: kondycja przedsiębiorstw – stan zagrożenia upadłością,
- badanie wrażliwości: stopień zagrożenia upadłością – zmiany skokowe wyznaczników kondycji przedsiębiorstw,
- testowanie skuteczności (metody identyfikacji i dynamicznego przewidywania),
- analiza i ocena prospektywna stanu zagrożenia upadłością.

### 1.4. GŁÓWNE RODZAJE I GRUPY NARZĘDZI ANALITYCZNYCH

Dla zdefiniowanego *Systemu Wczesnego Ostrzegania* przewiduje się wykorzystanie następujących głównych grup narzędzi analitycznych (podlegających uszczegółowieniu na etapie budowy narzędzi analitycznych), tworzących ścieżki badawcze, tj.:

- **analiza zmian strukturalnych oraz zmian wielkości, kierunków i natężenia upadłości przedsiębiorstw:**
  - analiza bezwzględnych i względnych różnic między udziałami poszczególnych składników struktury oraz efektu sumarycznego,
  - analiza kierunków zmian strukturalnych oraz dynamiki (intensywności) zmian strukturalnych z ich periodyzacją,
  - statystyczne miary zmienności struktur (odchylenie przeciętne, średnie standardowe i ważone),

- miary absolutnych i stosunkowych zmian strukturalnych, miernik zmienności (niepodobieństwa) struktur,
  - analiza koncentracji, dekoncentracji i entropii struktur,
  - analiza stanów koncentracji upadłości (LQ – współczynnik lokalizacji),
  - analiza RBU (Regionalny Barometr Upadłości),
- **analiza potencjału i wyników ekonomicznych w ujęciu bezwzględnym i względnym:**
    - metody analizy zmian wielkości i struktury potencjału ekonomicznego (mierniki potencjału),
    - metody analizy intensywności wykorzystania składników potencjału ekonomicznego (wskaźnik potencjału),
    - modele następstwa czasowego wskaźników kwantytatywnych i kwalitatywnych w badaniu poziomu i kierunków zmian efektywności gospodarowania składnikami potencjału ekonomicznego,
    - metody analizy wskaźnikowej w obszarze finansowym oraz metody badania zdolności kredytowej.
- **metody analizy pasm strategicznych i syntetycznego miernika rozwoju przedsiębiorstwa:**
    - modelowanie cyklu życia przedsiębiorstwa/grupy z wykorzystaniem funkcji log-logistycznych,
    - metody estymacji parametrów oraz metody wyznaczania przedziałów predykcji z uwzględnieniem heteroskedastyczności składnika losowego,
    - dobór zmiennych diagnostycznych (stymulant, destymulant, nominant) stanowiących składowe syntetycznego wskaźnika rozwoju,
    - normalizacja zmiennych diagnostycznych i określenie współrzędnych stałego lub ruchomego wzorca (tzw. obiektu wzorcowego),
    - analiza stopnia odstępstwa od obiektu wzorcowego,
    - metody prognozowania przyszłych wartości zmiennych syntetycznych na podstawie wybranych modeli szeregów czasowych.
- **metody identyfikacji sygnałów ostrzegawczych:**
    - sposoby definiowania sygnałów ostrzegawczych (średnie branżowe, dopuszczalne granice górne/dolne zewnętrzne/wewnętrzne, poziomy zmienności, przedziały wzorcowe, wielkości krytyczne),
    - metody kwantyfikacji sygnałów ostrzegawczych (podejście izolowane i zintegrowane),
    - miary położenia, zmienności, asymetrii i koncentracji,
    - metoda analizy składowych głównych (PCA),
    - metoda analizy skupień,
    - metody porządkowania liniowego.

- **analiza zależności obszaru: kondycja – stopień zagrożenia upadłością (konstrukcja modeli):**
  - metody wyodrębniania klas zagrożenia,
  - analiza rozkładów indywidualnych mierników, poszukiwanie rozkładów teoretycznych aproksymujących empiryczne rozkłady mierników,
  - metody analizy zmian rozkładów w czasie oraz kryteria oceny kierunków tych zmian,
  - analiza korelacji mierników kondycji oraz analiza skupień mierników kondycji (w celu grupowania podobnych mierników kondycji),
- **badanie wrażliwości: kondycja – stopień zagrożenia upadłością (konstrukcja modeli):**
  - estymacja modeli logistycznych opisujących związek: wielowymiarowe stany kondycji – prawdopodobieństwo zaliczenia do klasy,
  - estymacja modeli logistycznych dla związku: przyszły stan zagrożenia – aktualny stan kondycji,
  - metody analizy dyskryminacyjnej w zakresie dynamicznego przewidywania przynależności do klas.
- **testowanie skuteczności metod przewidywania zagrożenia upadłością (konstrukcja modeli):**
  - ocena czułości, specyficzności, dodatniej zdolności predykcyjnej i ujemnej zdolności predykcyjnej zastosowanych metod,
  - metoda krzywych ROC do oceny zdolności mierników, ich grup i agregatów do identyfikacji i predykcji zagrożenia upadłością,
  - metody poszukiwania optymalnych punktów odcięcia.
- **metody wielowymiarowe oraz data mining w zakresie wczesnego ostrzegania (warunkowe ujęcie o charakterze studialnym implikowane zakresem dostępu do informacji):**
  - wybrane metody w zakresie sieci neuronowych,
  - drzewa klasyfikacyjne, drzewa wzmacniane i lasy losowe,
  - maszyny wektorów wspierających,
  - metoda MARS (wielozmienna regresja adaptacyjna z użyciem funkcji sklepanych).
- **metody analizy w zakresie prognozowania zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością:**
  - analiza porównawcza wykorzystania modeli jedno- i wielowymiarowych w zakresie prognozowania stopnia zagrożenia upadłością,
  - ocena przydatności i skuteczności modeli klasy ARIMA do prognozowania zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością,
  - ustalenie specyfikacji dla modeli klasy SARIMA (Seasonal ARIMA) w przypadku wystąpienia sezonowości danych w szeregach czasowych,

- identyfikacja warunków ograniczających dla wykorzystania modeli klasy ETS (Exponential Smoothing),
  - specyfikacja modelu wielowymiarowego klasy VAR (*Vector Autoregression*),
  - modele typu VECM (modele wektorowej korekty błędem).
- **metody prognozowania punktowego i przedziałowego dla zmiennych określających stopień zagrożenia:**
    - analiza zastosowania prognozowania punktowego dla przyjętych modeli jedno- i wielowymiarowych,
    - ocena możliwości analizy obrazu niepewności z wykorzystaniem prognozowania przedziałowego,
    - identyfikacja warunków prognozowania przedziałowego z wykorzystaniem symulacyjnych metod generowania prognoz.
  - **metody oceny prospektywnych zmian stopnia zagrożenia przedsiębiorstw upadłością:**
    - analiza i wnioskowanie w zakresie zmiany stopnia zagrożenia przedsiębiorstw upadłością dla zdefiniowanych miar ogólnych,
    - identyfikacja kluczowych zależności na podstawie wynikowej kwantyfikacji wpływu zmian czynników mikroekonomicznych na stopień zagrożenia upadłością,
    - wynikowa ocena wrażliwości stopnia zagrożenia upadłością na skokowe zmiany czynników ekonomicznych z uwzględnieniem miar syntetycznych (wartość funkcji dyskryminacyjnej upadłości, syntetyczny miernik rozwoju, wskaźnik upadłości, wskaźnik pojemności kredytowej).

Szczegółowy opis metod i narzędzi został przedstawiony w rozdziale 1.5, 1.16 i 1.8 z wykorzystaniem źródłowych pozycji literaturowych zawartych w wykazie bibliografii.

## 1.5. OKREŚLENIE ZBIORÓW DANYCH I METOD ICH ANALIZY

Zgodnie z podstawowym założeniem projektu ISR, jednostką statystyczną badania będzie przedsiębiorstwo, opisywane szeregiem zmiennych, przy czym zmienne te – o charakterze jakościowym i ilościowym – będą systematyzowane według przyjętych kategorii, zgodnych ze zdefiniowanymi ścieżkami badawczymi: zmienne określające przynależność przedsiębiorstwa do jednej z wielu możliwych „klas”, zmienne wynikające z analizy sytuacji finansowej, wartości funkcji dyskryminacyjnej, zmienne wynikające z analizy pasm strategicznych oraz syntetycznego miernika rozwoju.

Podstawowym celem wykorzystania metod jednowymiarowych będzie statystyczny opis kształtowania się każdej badanej zmiennej z osobna w jednym punkcie czasowym w przekroju względem „klas” przedsiębiorstw. W tym względzie przewiduje się wykorzystanie metod opisu struktury zbiorowości, tzn. miary położenia, zmienności (rozproszenia), asymetrii oraz koncentracji. W zależności od (określonego empirycznie) charakteru rozkładu analizowanych danych, rozważone zostanie wykorzystanie miar klasycznych bazujących na momentach rozkładu empirycznego (np. średnia arytmetyczna, odchylenie standardowe), jak również miar bazujących na charakterystykach pozycyjnych rozkładu empirycznego (np. mediana, kwartyle, odchylenie ćwiartkowe). Metody analizy jednowymiarowej szerzej zostały zaprezentowane w podrozdziale 1.5.1. niniejszego opracowania.

W dalszej kolejności prowadzona będzie analiza dynamiki zmian poszczególnych zmiennych – badanie zmian średniego (średnia arytmetyczna), środkowego (mediana) lub typowego (modalna) poziomu zmiennej względem czasu. Ponadto będzie możliwe monitorowanie zmian w czasie jednorodności przedsiębiorstw, np. za pomocą śledzenia zmian rozproszenia i/lub koncentracji rozkładu. Uzupełnieniem będzie analiza zmiennych skategoryzowanych (zdychotomizowanych). W rezultacie zbiorowość przedsiębiorstw badanych pod względem wyróżnionej zmiennej w ramach danej „klasy”, można będzie syntetycznie opisać za pomocą odsetka przedsiębiorstw znajdujących się w stanie pożądanym (lub niepożądanym). Możliwe będzie ponadto monitorowanie zmian tego odsetka w czasie.

Zastosowanie analizy wielowymiarowej w ujęciu przekrojowym pozwoli zbadać strukturę współzależności pomiędzy badanymi zmiennymi. Punktem wyjścia będzie analiza współzależności dwuwymiarowych (np. za pomocą współczynnika korelacji liniowej Pearsona lub jego odpornych odpowiedników). Formułowana dalej ocena umożliwi wskazanie, czy badane zmienne dostarczają podobnej (pokrywającej się), czy też uzupełniającej się informacji o kondycji przedsiębiorstw. W przypadku niewystarczającego wnioskowania analitycznego rozważone zostanie zastosowanie metody analizy składowych głównych PCA (*Principal Component Analysis*), która zaprezentowana została w podrozdziale 1.5.2 przedmiotowego opracowania.



W dalszej kolejności rozważona zostanie możliwość wykorzystania analizy skupień, która pozwoli na wyodrębnienie grup przedsiębiorstw podobnych do siebie (w ujęciu wielowymiarowym). Możliwe będzie określenie czy badane przedsiębiorstwa w ramach poszczególnych „klas” są homogeniczne czy też heterogeniczne (analizę skupień można traktować, jako wielowymiarowe badanie zróżnicowania przedsiębiorstw). Szersza prezentacja dotycząca analizy skupień przedstawiona została w podrozdziale 1.5.3 niniejszego opracowania.

### 1.5.1. METODY ANALIZY JEDNOWYMIAROWEJ

Przedmiotem analizy struktury zbiorowości jest ogólna charakterystyka najważniejszych właściwości rozkładu badanej cechy statystycznej. Miary statystyczne możliwe do wykorzystywania w analizie struktury zbiorowości obejmują: miary położenia, miary zmienności, miary asymetrii (skośności) oraz miary koncentracji.

#### Miary położenia

Dzięki miarom położenia można uzyskać informację o tym, jaka jest przeciętna wartość badanej cechy, jaka jest jej wartość typowa lub ile wynosi jej wartość środkowa. W szczególności można zastosować następujące miary położenia:

- **średnia arytmetyczna** – będąca sumą wszystkich wartości zmiennej ( $x$ ) podzieloną przez liczbę obserwacji ( $n$ ). Informuje ona o przeciętnym poziomie cechy w badanej zbiorowości:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **mediana (kwartył drugi)** – to liczba dzieląca uporządkowany niemalejąco szereg statystyczny na dwie równe części pod względem liczebności:

$$M_e = \begin{cases} \frac{x_{n+1}}{2} & n \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{2} \left( x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) & n \text{ parzyste} \end{cases}$$

- **kwartył pierwszy ( $Q_1$ )** – dzieli uporządkowaną pod względem danej cechy zbiorowość na dwie części tak, że 25% jednostek statystycznych jest charakteryzowanych wartościami cechy co najwyżej równymi  $Q_1$ , a 75% co najmniej równymi  $Q_1$ ,

- **kwartyl trzeci ( $Q_3$ )** – dzieli uporządkowaną pod względem danej cechy zbiorowość na dwie części tak, że 75% jednostek statystycznych jest charakteryzowanych wartościami cechy co najwyżej równymi  $Q_3$ , a 25% co najmniej równymi  $Q_3$ .

### Miary zmienności

Miary rozproszenia (zmienności, dyspersji, zróżnicowania) mogą zostać wykorzystane są do określenia stopnia zmienności zbiorowości pod względem badanej cechy obejmują one:

- **rozstęp** – jest równy różnicy pomiędzy największą a najmniejszą wartością badanej cechy. Rozstęp dostarcza informacji o obszarze zmienności badanej zmiennej.  
 $R = \max(x) - \min(x)$
- **odchylenie ćwiartkowe** – konstrukcja tej miary opiera się na trzecim i pierwszym kwartylu (na jego wartość nie wpływają wartości mniejsze od  $Q_1$  i większe od  $Q_3$ ). Odchylenie ćwiartkowe odnosi się do 50% najbardziej typowych jednostek badanej zbiorowości:

$$Q = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2}$$

- **odchylenie standardowe** – określa o ile jednostki danej zbiorowości różnią się od średniej arytmetycznej badanej zmiennej. Wyższa wartość odchylenia standardowego oznacza, że zbiorowość badana pod względem wyróżnionej cechy jest bardziej zróżnicowana:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- **współczynnik zmienności (względna miara rozproszenia)** – pozwala określić stopień zróżnicowania zbiorowości pod względem badanej cechy. Współczynnik zmienności jest wyznaczany poprzez odniesienie wielkości odchylenia standardowego lub innej miary rozproszenia do średniej wartości cechy lub innej miary tendencji centralnej:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} 100\%$$

### Miary asymetrii i koncentracji

Miary asymetrii i koncentracji pozwalają w sposób bardziej szczegółowy opisać rozkład badanej cechy. Miara asymetrii w swej podstawowej formule informuje o tym czy przeważająca liczba jednostek statystycznych charakteryzuje się wartościami cechy poniżej czy też powyżej średniego poziomu. Miara koncentracji natomiast wskazuje na kształt rozkładu cechy, a w szczególności określa skupianie się wartości cechy wokół centrum rozkładu:

- **współczynnik asymetrii** – informuje zarówno o kierunku, jak i sile asymetrii. W przypadku, gdy  $As=0$  rozkład jest symetryczny,  $As>0$  oznacza rozkład o asymetrii prawostronnej (większa część zbiorowości charakteryzuje się wartościami cechy

mniejszymi od wartości średniej), a  $As < 0$  rozkład o asymetrii lewostronnej. Większa co do modułu wartość współczynnika asymetrii wskazuje na silniejszą asymetrię rozkładu cechy:

$$As = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$$

- **współczynnik koncentracji** – jest miarą skupiania się wartości badanej zmiennej wokół jej średniej. Wyższa wartość współczynnika koncentracji oznacza większe skupianie się wartości badanej cechy wokół średniej:

$$K = \frac{m_4}{s^4}$$

$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$$

gdzie:

$m_4$  – moment centralny czwartego rzędu,

$s^4$  – odchylenie standardowe do potęgi czwartej.

#### 1.5.2. METODA ANALIZY SKŁADOWYCH GŁÓWNYCH PCA

Analiza składowych głównych (PCA) służy do redukcji zmiennych do mniejszej liczby reprezentatywnych nowych zmiennych, na które można patrzeć jak na swoistego rodzaju „indeksy”. Kolejnym czynionym założeniem jest założenie mówiące, że indeksy powinny być nieskorelowane, tzn. informacja przenoszona przez każdy indeks powinna być nieskorelowana z informacją przenoszoną przez pozostałe indeksy. Tak wyznaczone indeksy (składowe główne) mogą posłużyć jako zmienne wejściowe w dalszych analizach, np. mogą stanowić syntetyczne zmienne w modelach predykcji upadłości.

W celu przedstawienia obiektów charakteryzowanych przez wielowymiarowy wektor  $X$  za pomocą kilku nieskorelowanych zmiennych o maksymalnie dużej pojemności informacyjnej poszukuje się kombinacji liniowej zmiennych:

$$\delta^T X = \sum_{i=1}^p \delta_i X_i$$

aby:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \delta: \sum_{i=1}^p \delta_i^2 = 1 \end{array} \right\} Var(\delta^T X)$$

W tym celu należy zrealizować kolejne etapy:

**Etap 1** – poszukiwanie kombinacji liniowej zmiennych o maksymalnej wariancji polega na obliczeniu wektora własnego  $\delta = \gamma_1$  skojarzonego z największą wartością własną  $\lambda_1$  macierzy kowariancji  $\Sigma$  wektora  $X$ ,

**Etap 2** – poszukiwanie kolejnej (składowej głównej) kombinacji liniowej zmiennych o maksymalnej wariancji przy założeniu, że jest ona ortogonalna do składowej głównej wyznaczonej w kroku 1 sprowadza się do wyznaczenia wektora własnego  $\gamma_2$  związanego z drugą co do wielkości wartością własną  $\lambda_2$ ,

**Etap p** – postępując analogicznie jak w kroku poprzednim, otrzymuje się ostatnią składową główną.

Najczęściej przyjmowanymi kryteriami określania optymalnej liczby składowych głównych są:

- kryterium wartości własnej, które wskazuje pozostawienie tylko tych składowych głównych, których wartości własne są większe od 1,
- kryterium osypiska,
- kryterium stopnia wyjaśniania wariancji – należy pozostawić tyle głównych składowych, aby procent wyjaśnionej wariancji był duży (najczęściej powyżej 80%).

**W stosowaniu metody PCA należy dodatkowo wskazać, że:**

- każda składowa główna ma wariancję równą  $Var(Y_j) = \lambda_j$ ,
- wszystkie składowe główne wyjaśniają całą informację zawartą w oryginalnym zbiorze zmiennych,
- interpretacji składowych głównych, o ile taka jest potrzebna, dokonuje się najczęściej za pomocą współczynników korelacji pomiędzy daną zmienną, a poszczególnymi składowymi głównymi.

---

### 1.5.3. METODY ANALIZY SKUPIEŃ

Analiza skupień należy do grupy metod nazywanych klasyfikacją bezwzorcową lub klasyfikacją bez nadzoru. Punktem wyjścia dla analizy skupień jest macierz, która zawiera „n” obserwacji na „p” zmiennych:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & p \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccc} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{ij} & \cdots & y_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nj} & \cdots & y_{np} \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

Efektom analizy skupień jest uzyskanie grup obiektów jednolitych (spójnych, podobnych) wewnątrz i różniących się pomiędzy grupami. Skupieniem można nazwać taki zbiór obiektów, w którym podobieństwo pomiędzy dowolną parą obiektów jest duże, natomiast podobieństwo pomiędzy jakimkolwiek obiektem należącym do skupienia, a obiektem nie należącym do tego skupienia jest małe.

Skupienia generowane przez większość standardowych algorytmów są skupieniami rozłącznymi, innymi słowy żaden obiekt nie może jednocześnie należeć do dwóch skupień. Istnieją jednak metody dopuszczające częściową przynależność obiektu do więcej niż jednego skupienia, są to tzw. metody rozmyte.

## Techniki hierarchiczne

Metody aglomeracyjne (hierarchiczne) są jednymi z podstawowych metod analizy skupień. Metody te polegają na sukcesywnym łączeniu najbardziej podobnych do siebie obiektów w coraz to większe grupy. W pierwszym etapie każdy obiekt tworzy samodzielne skupienie natomiast w ostatnim etapie działania procedury wszystkie obiekty znajdują się w jednym skupieniu. Etapy procedury aglomeracyjnej są następujące:

### Etap I. Doprowadzenie zmiennych do porównywalności (normalizacja zmiennych)

Realizowane jest techniką standaryzacji zmiennych oraz unitaryzacji zmiennych. W efekcie zastosowania standaryzacji każda zmienna charakteryzuje się średnią równą zero oraz odchyleniem standardowym równym jeden. Standaryzacja zmiennej jest zadana w następujący sposób:

$$z_{ij} = \frac{y_{ij} - \bar{y}_j}{s(y_j)},$$

gdzie:

$s(y)$  – odchylenie standardowe,

$\bar{y}$  – średnia wartość zmiennej.

Z kolei unitaryzacja zmiennej powoduje, że jej zakres wartości zostaje sprowadzony do przedziału [0,1]. Unitaryzacja zmiennej jest zadana w następujący sposób:

$$z_{ij} = \frac{y_{ij} - \min_i \{y_{ij}\}}{\max_i \{y_{ij}\} - \min_i \{y_{ij}\}}.$$

## Etap II. Wybór miary podobieństwa pomiędzy obiektami

W celu generowania skupień podobnych obiektów należy najpierw zdefiniować koncepcję odległości pomiędzy dwoma obiektami. W tabeli 1.1 przedstawiono kilka typowych miar odległości przy czym odległość euklidesowa jest zdecydowanie najczęściej spotykana w praktycznych zastosowaniach.

Tabela 1.1 Typowe miary odległości

Nazwa odległość	Definicja odległości
Odległość euklidesowa	$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^p (y_{ik} - y_{jk})^2}$
Odległość Minkowskiego	$d_{ij} = \left( \sum_{k=1}^p  y_{ik} - y_{jk} ^m \right)^{\frac{1}{m}}$
Odległość miejska	$d_{ij} = \sum_{k=1}^p  y_{ik} - y_{jk} $
Odległość Czebyszewa	$d_{ij} = \max_{k=1, \dots, p} \{ y_{ik} - y_{jk} \}$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie źródłowych pozycji literaturowych zawartych w wykazie bibliografii.

## Etap III. Wybór miary podobieństwa pomiędzy obiektami a grupami obiektów

Realizowany jest z wykorzystaniem:

- **metody najbliższego sąsiedztwa (pojedynczego wiązania)**, która wskazuje, że odległość między dwoma skupieniami to najmniejsza z odległości pomiędzy ich elementami,
- **metody najdalszego sąsiedztwa (metod pełnego wiązania)**, która wskazuje, że odległość między dwoma skupieniami to największa z odległości pomiędzy ich elementami,
- **metody średniej**, która wskazuje, że odległość między dwoma skupieniami to średnia z odległości pomiędzy każdymi dwoma obiektami jednego i drugiego skupienia,
- **metody Warda**, która wskazuje, że kryterium grupowania jednostek jest osiągnięcie w ramach skupień najmniejszego zróżnicowania zmiennych opisujących obiekty.

## Etap IV. Wyznaczenie macierzy odległości

W tym etapie wyznaczana jest macierz odległości, która zawiera odległość pomiędzy każdą parą z „n” obiektów. Dwa obiekty, które są najbliższe sobie zostają połączone, dając

tym samym początek kolejnym połączeniom. Po pierwszym kroku algorytmu liczba obiektów zmniejsza się z „n” do „n-1”. Następnie wyznaczana jest macierz odległości pomiędzy „n-1” obiektami, przy czym jeden z nich jest już dwuelementowym skupieniem. Dwa obiekty, które są najbliższe sobie zostają połączone. Procedura postępuje w przedstawiony powyżej sposób do momentu złączenia wszystkich obiektów w jedno skupienie.

### **Metody optymalnego podziału, metoda k – średnich**

Metoda k-średnich jest jedną z najpopularniejszych metod analizy skupień, która nie jest metodą hierarchiczną. W przypadku algorytmów hierarchicznych raz połączone obiekty nie mogą zostać rozdzielone i przyłączone do innego obiektu. Metoda k-średnich w przeciwieństwie do metod aglomeracyjnych pozwala na takie postępowanie.

#### **Etapy działania algorytmu k-średnich aglomeracyjnej:**

- I. normalizacja zmiennych,
- II. ustalenie liczby skupień – „k”,
- III. wylosowanie „k” obiektów ze zbioru danych i uznanie ich za wstępne centra skupień (środki ciężkości),
- IV. przypisanie do poszczególnych centrów skupień obiektów im najbliższych, np. w sensie odległości euklidesowej,
- V. obliczenie nowych centrów skupień,
- VI. ponowne przypisanie do poszczególnych centrów skupień obiektów im najbliższych,
- VII. powtarzanie powyższego kroku aż do ustabilizowania się przynależności poszczególnych obiektów do skupień.

## **1.6. METODY TWORZENIA I ANALIZY ZBIORU ZINTEGROWANEGO**

W wyniku zastosowania zdefiniowanych ścieżek badawczych stworzony będzie „zbiór zintegrowany” (przy możliwym utrzymaniu definicji jednostki statystycznej w postaci przedsiębiorstwa). Mając do dyspozycji skonstruowany wzorzec oraz profile indywidualne przedsiębiorstw, możliwe będzie obliczanie odległości poszczególnych przedsiębiorstw od sytuacji idealnej, a tym samym możliwe jest stworzenie rankingu przedsiębiorstw (porządkowanie liniowe obiektów wielowymiarowych – zintegrowana reguła decyzyjna). Alternatywną propozycją jest rozwiązanie bazujące na zmiennych zdychotomizowanych. W tym przypadku profil przedsiębiorstwa stanowić będzie wektor wartości zero-jedynkowych, wyróżniających sygnały ostrzegawcze.

W wyniku empirycznej analizy danych zostanie określona optymalna metoda agregacji zero-jedynkowych „zmiennych sygnalizujących”. W wariancie podstawowym zakłada się, że aktywność wszystkich „zmiennych sygnalizujących” będzie przesłanką do uznania przedsiębiorstwa za zagrożone upadłością. Inne warianty zakładać będą określenie minimalnej liczby sygnałów upoważniających do uznania przedsiębiorstwa za zagrożone upadłością. Dodatkowo określona zostanie zgodność sygnałów generowanych przez poszczególne „zmienne sygnalizujące”, np. za pomocą miar służących do określania zgodności pary zmiennych binarnych (współczynnik gamma, współczynnik korelacji tetrachorycznej itp.).

Zdefiniowany w powyższy sposób „zbiór zintegrowany”, będzie podlegał analizie dla celów wnioskowania końcowego – klasyfikacja podmiotów według ich stanu ekonomiczno-finansowego (grupowanie oraz ranking), w ramach wstępnie zdefiniowanych struktur:

- struktura według rodzajów prowadzonej działalności gospodarczej,
- struktura sekcji prowadzonej działalności,
- struktura fazowa przemysłu,
- struktura przedmiotowa,
- struktura własnościowa.

W podrozdziale 1.6.1 przedstawiono w sposób szczegółowy metody porządkowania liniowego.

#### 1.6.1. METODY PORZĄDKOWANIA LINIOWEGO

Metody porządkowania liniowego mają za zadanie uporządkować pewne obiekty od najgorszego do najlepszego. Wyzwaniem jest to, że każdy obiekt jest opisywany wieloma zmiennymi. Punktem wyjścia dla analizy skupień jest macierz, która zawiera „n” obserwacji na „p” zmiennych.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \left( \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2j} & \dots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{i1} & y_{i2} & \dots & y_{ij} & \dots & y_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nj} & \dots & y_{np} \end{matrix} \right) \end{matrix}$$



### **Etapy porządkowania liniowego:**

- I. określenie merytorycznego przedmiotu analizy,
- II. dobór zmiennych diagnostycznych,
- III. identyfikacja charakteru zmiennych. ustalenie czy dana zmienna jest stymulantą, destymulantą, dominantą,
- IV. ustalanie ważności zmiennych. najczęściej wagi ustalane są przez ekspertów albo przyjmuje się równe wagi (uznaje się, że każda zmienna jest tak samo ważna),
- V. normalizacja zmiennych – doprowadzenie zmiennych do porównywalności. można tutaj zastosować omówioną wcześniej metodę standaryzacji lub unitaryzacji,
- VI. agregacja zmiennych znormalizowanych (tworzenie wskaźnika syntetycznego).

Porządkowanie liniowe można przeprowadzić za pomocą trzech najpopularniejszych metod, tj.:

#### **A. Metody sum standaryzowanych:**

- standaryzacja zmiennych, zamiana destymulant na stymulanty,
- dodanie wartości zmiennych standaryzowanych,
- rangowanie obiektów od najlepszego do najgorszego,

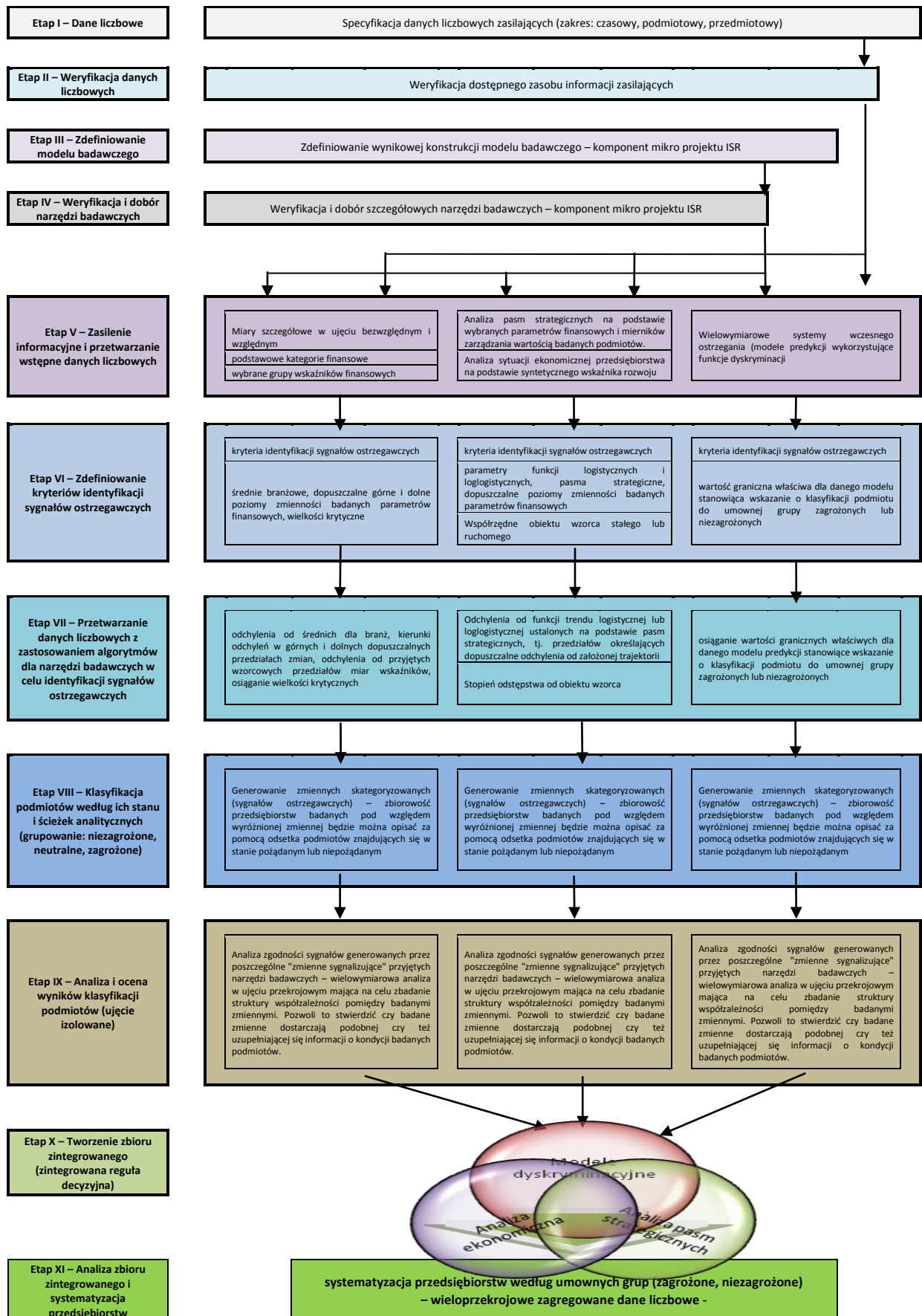
#### **B. Metody wzorca rozwoju:**

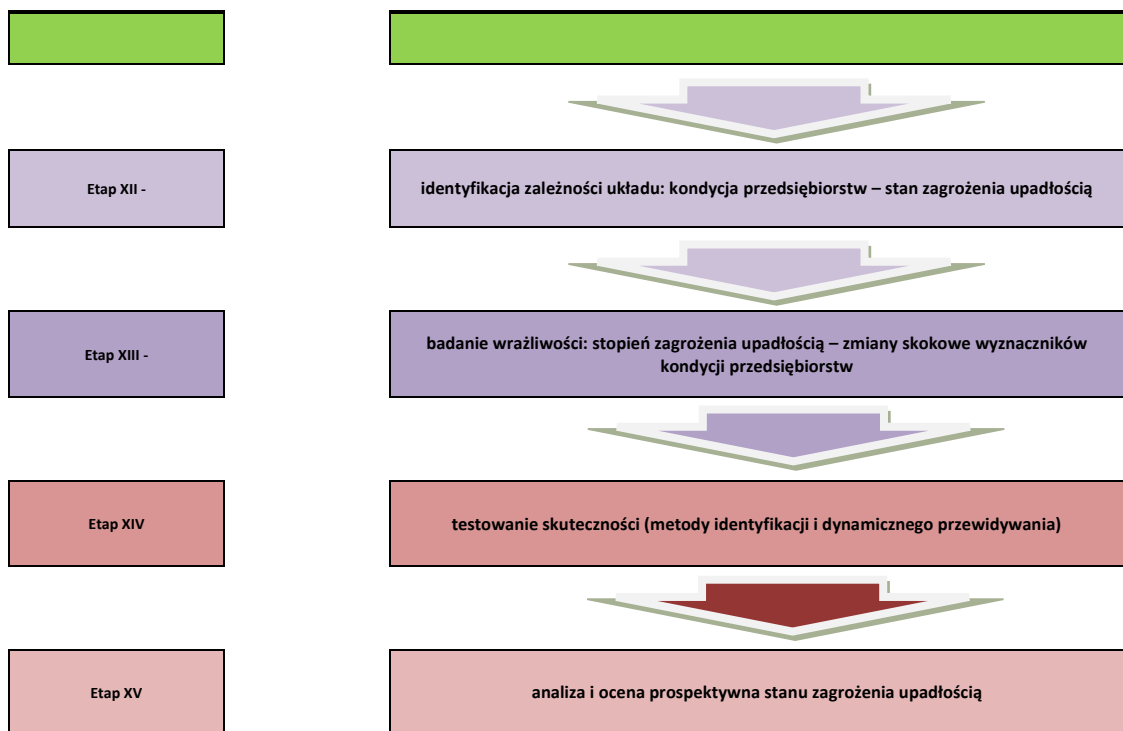
- standaryzacja zmiennych, zamiana destymulant na stymulanty.
- ustalenie współrzędnych wzorca (największe wartości zmiennych standaryzowanych),
- wyznaczenie odległości euklidesowej każdego obiektu od wzorca, odległości stanowią wskaźnik agregatowy,
- rangowanie obiektów od najlepszego do najgorszego,

#### **C. Metody antywzorca rozwoju:**

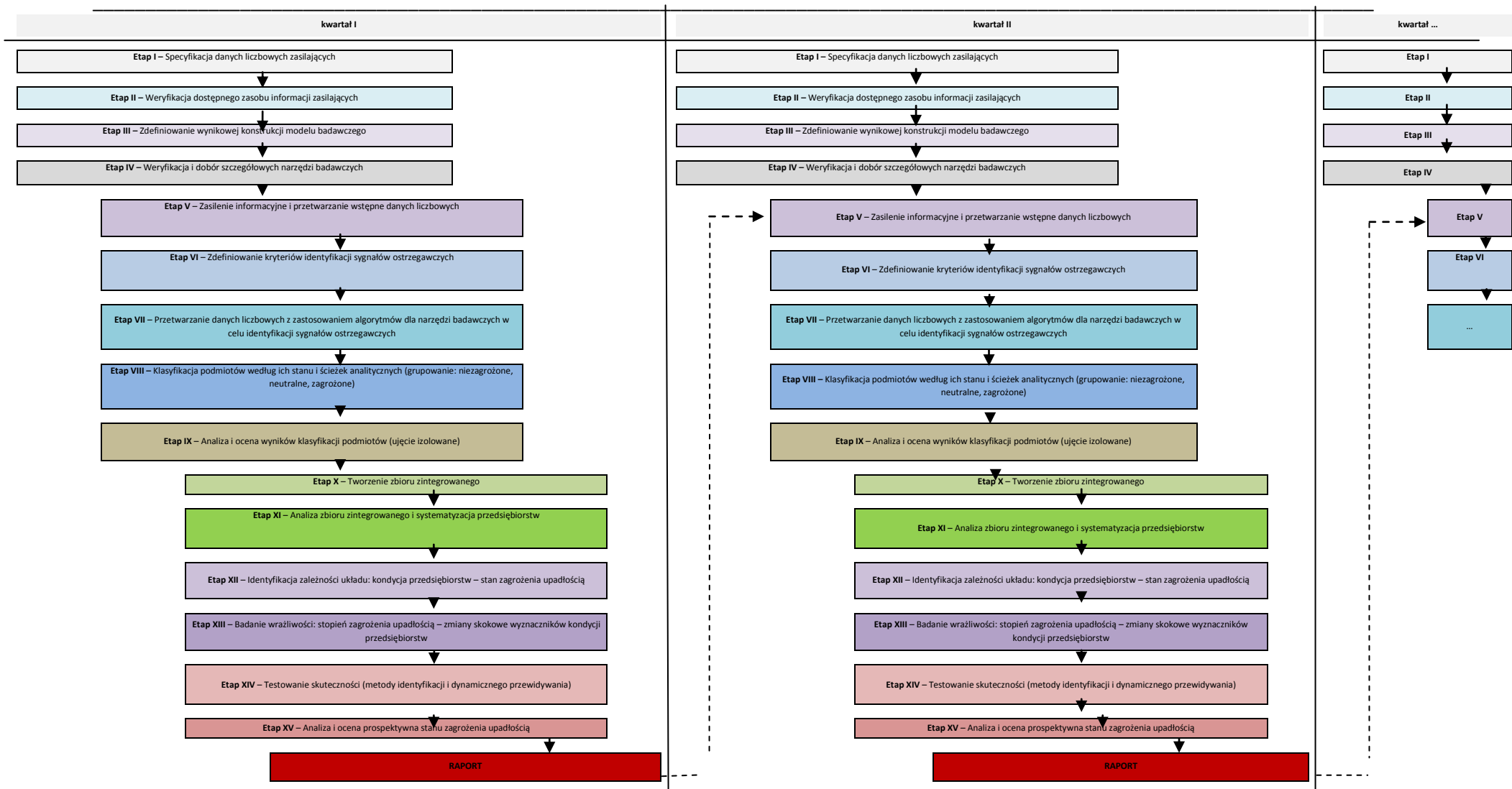
- standaryzacja zmiennych, zamiana destymulant na stymulanty,
- ustalenie współrzędnych antywzorca (najmniejsze wartości zmiennych standaryzowanych),
- wyznaczenie odległości euklidesowej każdego obiektu od wzorca, odległości stanowią wskaźnik agregatowy,
- rangowanie obiektów od najlepszego do najgorszego.

## 1.7. SCHEMATY BADAWCZE SWO – KOMPONENT MIKROEKONOMICZNY





Źródło: Opracowanie własne.



Źródło: Opracowanie własne.

## 1.8. PODSTAWOWE METODY I NARZĘDZIA ANALIZY STANU I WYNIKÓW SEKTORA PRZEDSIĘBIORSTW DLA POTRZEB SWO

### 1.8.1. ANALIZA ZMIAN STRUKTURALNYCH ORAZ ZJAWISKA UPADŁOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW

#### Cele i kierunki badań nad zmianami strukturalnymi w Polsce

Jednym z efektów procesu transformacji systemowej są dokonujące się zmiany w zakresie struktury podmiotowej gospodarki narodowej. W sposób istotny zmieniają relacje między sektorem publicznym, obejmującym własność państwową, komunalną i mieszaną (z przewagą sektora publicznego), a sektorem prywatnym, na który składa się własność prywatna krajowa, własność zagraniczna oraz mieszana (z przewagą kapitału prywatnego).

Obserwacja procesu rozwojowego polskiej gospodarki pozwala na sformułowanie dwóch wniosków:

- rozwój gospodarczy zawsze związany jest ze zmianami strukturalnymi, a ich brak może wskazywać na zagrożenie pozytywnych tendencji zmian,
- zmiany strukturalne są wprost proporcjonalne do tempa wzrostu (rozwoju) gospodarczego.

Cechą charakterystyczną struktur gospodarczych jest ich zmienność w czasie, natomiast głównymi czynnikami tych przemian są m.in. rozwój nauki i techniki, jako samodzielnej siły dynamizującej rozwój współczesnej gospodarki. Z tego względu jeszcze jednym ważnym układem charakteryzującym gospodarkę jest struktura gospodarki oceniana ze względu na stopień nowoczesności wytwarzanych produktów i stosowanych technologii.

Determinantami zmian strukturalnych najczęściej są potrzeby społeczne bądź też społeczno-gospodarcze, które wpływają na unowocześnienie danej gałęzi gospodarki lub/i całej gospodarki. Zatem konsekwencją zmian strukturalnych jest najczęściej powstawanie nowych wyrobów, technik i technologii wytwarzania, których rozwój ma istotny wpływ na tempo i kierunki przemian strukturalnych, intensywność tych zmian oraz efekty ekonomiczne osiągnięte przez podmioty.

Działania nazywane dostosowaniami strukturalnymi, pod którymi rozumie się poprawę struktury i efektywności gospodarki dzięki lepszej alokacji zasobów, są warunkiem przejścia od stabilizacji gospodarczej do trwałego wzrostu gospodarczego. Należy mieć jednak na uwadze fakt, iż konieczność tych zmian, a zwłaszcza ich szeroki zakres przedmiotowy i podmiotowy wynika nie tyle z niedorozwoju gospodarczego, ile z rozwoju niewłaściwie ukierunkowanego.

Wśród podstawowych celów przekształceń strukturalnych w gospodarce wymienia się między innymi:

- wzrost konkurencyjności produktów oraz wzmocnienie orientacji proeksportowej,
- zwiększenie efektywności ekonomicznej przedsiębiorstw,
- przyspieszenie wzrostu ekonomicznego oraz przeciwdziałanie niskiej wydajności pracy,
- unowocześnienie przedsiębiorstw,
- wykorzystanie procesów przemian strukturalnych w przewyżnianiu niekorzystnego wpływu pogarszania się ogólnych uwarunkowań rozwoju,
- masową realokację zasobów, umożliwiającą stworzenie efektywnej struktury potencjału wytwórczego,
- zapewnienie osłony działalności gospodarczej przed zwiększeniem niekorzystnych zmian mających wpływ na upadłość przedsiębiorstw.

Cele te mają zatem zmierzać do stworzenia odpowiednich warunków sprzyjających przetrwaniu i rozwojowi przedsiębiorstw, aby te nie tylko utrzymywały swoją aktywność gospodarczą, ale także rozwijały się i osiągały jak najlepsze wyniki z ekonomicznego punktu widzenia.

### **Metody pomiaru zmian strukturalnych**

Pomiar i ocena zmian strukturalnych może być dokonywana dwoma sposobami. Pierwszy sposób nazwany tradycyjnym, polega na obliczeniu wskaźników struktury będących udziałami procentowymi analizowanych i ocenianych wielkości składników struktur gospodarczych w wielkościach ekonomicznych będących miernikami całości, które one stanowią. Takimi wielkościami ekonomicznymi mogą być: PKB, produkcja sprzedana, przychody ze sprzedaży, liczba pracujących, wartość nakładów inwestycyjnych, wartość środków trwałych, itp. Badanie zmian strukturalnych ma na celu określenie bezwzględnych i względnych różnic między udziałami poszczególnych składników struktury oraz sumarycznego efektu takich zmian w porównywanych momentach czasu tego samego lub wielu różnych obiektów. Umożliwia to dodatkowo wskazanie kierunków przekształceń strukturalnych, obliczenie dynamiki (intensywności) zmian strukturalnych oraz wskazanie tych składników struktur, które w największym stopniu intensyfikują przemiany strukturalne.

Drugim sposobem pomiaru zmian strukturalnych jest analiza taksonomiczna w ocenie intensywności i podobieństwa struktur.

### **Metody oceny intensywności oraz podobieństwa struktury sektora przedsiębiorstw**

Tradycyjny sposób mierzenia zmian strukturalnych nie daje możliwości ustalenia stopnia intensywności tych zmian. Chcąc uzyskać dokładniejszy pomiar i tym samym ocenę

zmian struktury gospodarki, należy analizować zmiany w niej zachodzące w długim okresie. Ponadto możliwość tą uzyskuje się wykorzystując do mierzenia zmian strukturalnych takie statystyczne miary, jak średnie oraz miary zmienności.

#### Statystyczne miary badania zmienności struktur:

A. Odchylenie przeciętne

$$D = \frac{\sum |X - M|}{N}$$

B. Odchylenie przeciętne wazone

$$D = \frac{\sum |X - M| * f}{f}$$

C. Odchylenie średnie standardowe

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (X - M)^2}{N}}$$

D. Odchylenie średnie wazone

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (X - M)^2 * f}{f}}$$

gdzie:

X – wielkość cechy zmiennej (wartość poszczególnych jednostek zmiennej X),  
M – średnia arytmetyczna wartości poszczególnych jednostek zmiennej X,  
N – liczebność zbiorowości (ilość części składowych w badanej całości),  
f – wagi poszczególnych jednostek zmiennej X,  $\sum f = N$ .

Powyższym wzorom można nadać formę pozwalającą na wykorzystanie ich dla pomiaru zmian strukturalnych i nazwać je w zależności od treści ekonomicznych przez nie reprezentowanych. W związku z tym przyjmuje się że:

- $m_0$  – udział procentowy części (składnika struktury) w całości w czasie  $t_0$ ,
- $m_1$  – udział procentowy części w całości w czasie  $t_1$ ,
- $\Delta m$  – absolutny przyrost udziału danej części w czasie  $t_1 - t_0$ ,
- $i_m$  – tempo wzrostu któregośkolwiek z udziałów, przy czym  $i_m = \frac{m_1}{m_0}$ ,  $\Delta m = m_1 - m_0$ ,
- średni absolutny przyrost zawsze równy jest zero, średnie tempo wzrostu równe jest 1 (lub 100%).

Statystyczne miary wykorzystywane do mierzenia zmian strukturalnych należą:

#### A. Liniowy współczynnik absolutnych zmian strukturalnych

$$ZS_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (p_{i1} - p_{i0})}{n}$$

gdzie:

$ZS_1$  – liniowy współczynnik absolutnych zmian strukturalnych,

$p_{i0}$  – udział i-tego składnika struktury przemysłu w analizowanej całości w czasie  $t_0$ ,

$p_{i1}$  – udział i-tego składnika struktury przemysłu w analizowanej całości w czasie  $t_1$ ,

$n$  – liczba składników struktury.

Liniowy współczynnik absolutnych zmian strukturalnych stanowi średnią arytmetyczną bezwzględnych różnic udziałów składników porównywanych struktur (np. gałęzi, sekcji, działów, wyrobów przemysłu) analizowanych całościach (np. zatrudnienie ogółem w przemyśle, produkcja globalna, sprzedana, wartość dodana). Współczynnik  $ZS_1$  informuje o średniej intensywności zmian strukturalnych jakie wystąpiły w czasie  $t_0 - t_1$ .

Przyjmuje on wartości z przedziału  $\left\langle 0, \sqrt{\frac{2}{n}} \right\rangle$

#### B. Liniowy współczynnik stosunkowych zmian strukturalnych

$$ZS_2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{p_{i1}}{p_{i0}} - 1 \right| * p_{i0}$$

gdzie:

$ZS_2$  – liniowy współczynnik stosunkowych zmian strukturalnych.

Współczynnik  $ZS_2$  będąc sumą iloczynów tempa zmian strukturalnych w czasie  $t_0 - t_1$  i wartości poszczególnych składników struktury w momencie czasu  $t_0$  informuje o intensywności zmian strukturalnych w okresie czasu  $t_0 - t_1$ . Im wyższa jest jego wartość, tym intensywniejsze są zmiany porównywanych struktur.

#### C. Kwadratowy współczynnik absolutnych zmian strukturalnych

$$ZS_3 = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (p_{i1} - p_{i0})^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

gdzie:

$ZS_3$  – kwadratowy współczynnik absolutnych zmian strukturalnych.



Współczynnik  $ZS_3$  jest pierwiastkiem kwadratowym iloczynu sumy kwadratów różnic między wartościami wszystkich składników porównywalnych struktur przez liczbę tych składników. Większa wartość współczynnika wskazuje, że bardziej różnią się porównywane struktury, a tym samym nastąpiły większe zmiany strukturalne w dwóch porównywanych czasie.

Współczynnik ten przyjmuje wartości z przedziału  $\left\langle 0, \sqrt{\frac{2}{n}} \right\rangle$

#### D. Kwadratowy współczynnik stosunkowych zmian strukturalnych

$$ZS_4 = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(P_{i1} - P_{i0})^2}{P_{i0}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

gdzie:

$ZS_4$  – kwadratowy współczynnik stosunkowych zmian strukturalnych.

Współczynnik  $ZS_4$  jest pierwiastkiem kwadratowym z sumy ilorazów kwadratów różnic między wartościami wszystkich składników porównywanych struktur w czasie  $t_1$  –  $t_0$  i ich wartości w czasie  $t_0$ . Większa wartość współczynnika  $ZS_4$  wskazuje na większe zmiany strukturalne.

#### E. Cosinus kąta zawartego między dwoma wektorami przedstawiającymi porównywane struktury

$$ZS_5 = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i0} * P_{i1}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}^2 * \sum_{i=1}^n P_{i1}^2},$$

gdzie:

$ZS_5$  – współczynnik zmian strukturalnych mierzony wartością cosinusa kąta zawartego między wektorami porównywanych struktur w przestrzeni n-wymiarowej.

Współczynnik  $ZS_5$  przyjmuje wartości z przedziału  $\langle 0,1 \rangle$ . Gdy obydwa wektory, przedstawiające porównywane struktury, są równymi i nałożonymi na siebie odcinkami, wówczas  $ZS_5 = 1$ , ponieważ kąt między wektorami równa się  $0^\circ$ . W przypadku, gdy obydwa wektory tworzą ze sobą kąt prosty, wartość  $ZS_5 = 0$ , czyli porównywane struktury są całkowicie niepodobne, a więc zmiany strukturalne osiągnęły maksymalną wartość.

Przedstawione współczynniki zmian strukturalnych mogą być użyte do badania struktur o stałej liczbie składników struktury. Jednak w przypadku analizy zmian

strukturalnych w długich okresach następuje często zmniejszenie lub zwiększenie liczby składników struktury, niezależnie od zmian ich udziałów w rozpatrywanych całościach.

Należy dodatkowo wskazać, że zmiany w strukturze gospodarki są rezultatem różnic w tempie rozwoju jej poszczególnych sekcji, działów, gałęzi lub grup wyrobów, czy też rodzajów produkcji przemysłowej. Dlatego charakteryzując zmiany strukturalne, celowe wydaje się badanie tempa rozwoju poszczególnych gałęzi oraz posługiwanie się tzw. gałęziowymi współczynnikami wyprzedzenia. Jest on stosunkiem tempa wzrostu poszczególnych elementów układu ekonomicznego do tempa wzrostu całego układu.

$$p_w = \frac{P_c}{P_0}$$

Współczynnik  $p_w$  umożliwia poznanie i wyjaśnienie kierunków zmian strukturalnych, im bowiem większe jest tempo rozwoju danej gałęzi, tym większego nabiera on znaczenia w dokonujących się zmianach strukturalnych.

W celu usunięcia cechy niejednorodności w stosunku do współczynników zmian strukturalnych, stosuje się współczynnik zmienności (niepodobieństwa) struktur, o postaci:

$$ZS_6 = 1 - \sum_{i=1}^n \min(p_{i0}, p_{i1})$$

lub

$$NPS = 1 - \sum_{i=1}^n \min(p_{i0}, p_{i1})$$

gdzie:

$ZS_6$  (NPS) – współczynnik zmienności (niepodobieństwa) struktur.

Współczynnik  $ZS_6$  przyjmuje wartości z przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ . Jego interpretacja jest następująca: gdy brak jest jakichkolwiek zmian strukturalnych w czasie  $t_0 - t_1$ , wówczas współczynnik  $ZS_6$  przyjmuje wartość 0, zaś w przypadku całkowitej zmiany struktury – wartość 1.

Obliczenie wartości współczynnika zmienności (niepodobieństwa) struktur i stanowi punkt wyjścia specjalnej procedury taksonomicznej, która stanowi w pewnym sensie alternatywę w badaniu struktur. Natomiast miarę podobieństwa dwóch struktur określa następująca relacja:

$$PS = \sum_{i=1}^n \min(p_{i0}, p_{i1})$$

gdzie:

PS – miara podobieństwa struktur,

i – numer składnika struktury,

$n$  – liczba składników struktury,  
 $p_{i0}$  – udział  $i$ -tego składnika struktury w analizowanej całości w czasie  $t_0$ ,  
 $p_{i1}$  – udział  $i$ -tego składnika struktury w analizowanej całości w czasie  $t_1$ ,  
 $\min$  – minimalna wartość składnika struktury.

W przypadku, gdy porównywane struktury są identyczne, to wówczas miara podobieństwa struktur przyjmuje 1 ( $PS = 1$ ), gdy zaś struktury są całkowicie różne wartość miary podobieństw wynosi 0 ( $PS = 0$ ).

### **Metody oceny zmian koncentracji i dekoncentracji struktur sektora przedsiębiorstw**

Proces koncentracji wraz z współzależnymi z nim procesami specjalizacji kooperacji, autarkizacji, dywersyfikacji wpływa na ilość i natężenie różnorodnych powiązań ekonomicznych, finansowych, technicznych i technologicznych pomiędzy przedsiębiorstwami prowadzącymi działalność gospodarczą w danym kraju i w skali międzynarodowej. Powiązania te prowadzą do powstawania nowych i likwidacji niektórych spośród istniejących form organizacyjnych i prawnych działalności gospodarczej. Charakter takich powiązań bywa różny pod względem zakresu i przedmiotu oraz ich trwałości. Różnią się one także pod względem form organizacyjnych i prawnych w ramach, których powiązania takie funkcjonują.

Proces koncentracji działalności gospodarczej dokonuje się poprzez skupianie i łączenie czynników wytwórczych działalności gospodarczej i jej efektów w coraz większych podmiotach gospodarczych i tworzonych przez nie organizacjach gospodarczych. W następstwie koncentracji zwiększa się udział dużych podmiotów i organizacji gospodarczych. W rezultacie zmienia się wielkość i struktura ogółu analizowanych i ocenianych podmiotów i organizacji gospodarczych mierzona ich liczbą, wielkością zatrudnienia, majątku, przychodów ze sprzedaży, nakładów inwestycyjnych. W podany sposób definiowany proces koncentracji rozumiany jest w znaczeniu czynnościowym. Pojęcie koncentracji interpretowane, jako określony stan, czyli określony stopień skupienia działalności gospodarczej w dużych podmiotach i organizacjach gospodarczych w badanej ich zbiorowości jest użyte w znaczeniu rzeczowym. Stopień koncentracji działalności gospodarczej stanowi cechę służącą do jej charakterystyki w danym kraju, w danym rodzaju działalności gospodarczej (produkcyjna, przemysłowa, usługowa) w przekroju międzynarodowym, itp. Pojęcie koncentracji jest wtedy używane w znaczeniu atrybutowym.

### **Mierniki koncentracji dekoncentracji struktur**

Miernikami koncentracji działalności najczęściej stosowanymi w analizach i ocenach zmian stopnia koncentracji działalności gospodarczej są:

- liczba podmiotów gospodarczych ogółem,
- liczba podmiotów gospodarczych pogrupowanych według klas wielkości mierzonej liczbą osób zatrudnionych w wyodrębnionych klasach wielkości,

- wartość majątku trwałego oraz wartość przychodów ze sprzedaży podmiotów gospodarczych zaliczonych do wyodrębnionych klas wielkości zatrudnienia,
- przeciętna wielkość podmiotu gospodarczego w badanej zbiorowości podmiotów mierzonej liczbą zatrudnionych pracowników, wartością środków trwałych, wartością przychodów ze sprzedaży, wartością nakładów inwestycyjnych,
- przeciętna wielkość podmiotu gospodarczego w wyodrębnionych klasach wielkości badanej zbiorowości podmiotów.

Do analizy zmian koncentracji i dekoncentracji strukturalnych wybrano współczynnik Herfindahla-Hirschmana oraz wskaźnik entropii.

**Współczynnik Herfindahla-Hirschmana** oblicza się na podstawie danych strukturalnych wskazujących na nierównomierność proporcji ilościowych między składnikami struktury obliczonej na podstawie wielkości wybranych jako charakterystyki ilościowe struktury. Współczynnik Herfindahla-Hirschmana (HHI) jest najczęściej stosowaną miarą koncentracji na rynku:

$$HHI = \sum_{i=1}^n u_i^2$$

gdzie:

$u_i$  – oznacza udział wartości badanej cechy dla  $i$ -tego obiektu w łącznej wartości badanej cechy dla wszystkich  $n$  analizowanych jednostek.

Współczynnik koncentracji Herfindahla-Hirschmana oblicza się, jako sumę kwadratów wartości wskaźników struktury. Przyjmuje on wartości 0-1, 0-100% lub 0-10000. Wartość górnej granicy przedziału wartości, jakie przyjmuje omawiany współczynnik wskazuje na maksymalną koncentrację działalności gospodarczej i pełny monopol w działalności gospodarczej prowadzonej w takim przypadku przez jedno przedsiębiorstwo. Z kolei wartości zbliżone do 0 wskazują na duże rozproszenie działalności gospodarczej.

W Stanach Zjednoczonych poziom HHI poniżej 1000 wskazuje na brak koncentracji, poziom od 1000 do 1800 wskazuje na umiarkowanie wysoką koncentrację, zaś powyżej 1800 na bardzo wysoką koncentrację.

**Wskaźnik entropii (WE)** jest miarą służącą do określania rozproszenia działalności gospodarczej w branży lub w gospodarce i przyjmuje postać:

$$WE = \sum_{i=1}^n u_i \ln \left( \frac{1}{u_i} \right)$$

gdzie:

$u_i$  oznacza wskaźnik struktury dla danej jednostki.

Konstrukcja wzoru wskazuje, że ze zbioru analizowanych obiektów należy wyłączyć te, których udział w wartości cechy jest zerowy. Wskaźnik entropii jest miarą niemianowaną i zawiera się w przedziale  $[0; \ln(n)]$ . Przyjęcie przez wskaźnik entropii wartości 0 wskazuje na występowanie zupełnej koncentracji (cała wartość cechy przypisana jest tylko jednej z rozpatrywanych jednostek), wartość wskaźnika równa  $\ln(n)$  świadczy o równomierności rozkładu cechy, a więc braku koncentracji.

### **Metodologia analizy i oceny zmian wielkości, stopnia i kierunków upadłości sektora przedsiębiorstw**

Analiza upadłości przedsiębiorstw w Polsce obejmować będzie zmiany zarówno wielkości bezwzględnej liczby podmiotów zakwalifikowanych do grupy podmiotów, które znalazły się w stanie upadłości, jak i dynamiki ich zmian ogółem, w przekrojach: regionalnym, sektorowym, własnościowym oraz według form organizacyjno-prawnych.

Analogicznie do analizy zmian strukturalnych badania polegać będą na obliczeniu wskaźników struktury będących udziałami procentowymi wielkości składników analizowanych i ocenianych struktur.

W celu określenia skali zjawiska upadłości w poszczególnych przekrojach określony zostanie tzw. Wskaźnik Upadłości w analizowanych grupach oraz jego.

$$WU = \frac{\sum Ei n}{\sum En} \times 100\%$$

gdzie:

WU – odsetek upadłości analizowanej grupy w liczbie ogółem,

Ei – liczba przedsiębiorstw które postawione zostały w stan upadłości,

En – łączna liczba przedsiębiorstw ogółem.

Zmiany wartości obliczonych wskaźników w czasie pozwolą wskazać na składniki analizowanej struktury, których udziały wzrastają, maleją, nie zmieniają się lub zmieniają się tylko nieznacznie. W przypadku analizy zmian strukturalnych różnych struktur w tych samych okresach, podstawą oceny różnic między porównywanymi strukturami są różnice wartości wskaźników struktury charakteryzujące takie same wskaźniki porównywanych struktur. Następnie zostanie obliczona dynamika (intensywność) zmian strukturalnych oraz przeprowadzona zostanie analiza taksonomiczna w ocenie intensywności i podobieństwa struktur.

Oprócz wymienionych sposobów pomiaru zmian stanu podmiotów będących w stanie upadłości, określony zostanie udział poszczególnych grup przekrojowych w liczbie podmiotów ogółem (określenie struktury podmiotowej) oraz ich stopień koncentracji (współczynnik Herfindahla-Hirschmana). Następnie uzyskane wielkości poszczególnych elementów struktur zostaną uporządkowane w kolejności malejącej ukazując tym samym ranking poszczególnych składników struktury ze względu na ich udział w wartości ogółem.

Dodatkowo analizie poddana zostanie skala upadłości przedsiębiorstw w ujęciu globalnym oraz regionalnym, której celem będzie stworzenie rankingu województw, charakteryzujących się najwyższym poziomem koncentracji procesów upadłościowych.

W celu analizy koncentracji stanów upadłości wykorzystana zostanie miara, stosowana w geografii ekonomicznej, określana jako współczynnik lokalizacji (LQ). Analizując skalę procesów upadłościowych nie tylko w skali ogólnopolskiej, ale również w poszczególnych regionach, można odnieść ich intensywność do liczby podmiotów zarejestrowanych w danym województwie. W ten sposób relatywizowana jest mapa procesów upadłościowych względem faktycznego natężenia procesów gospodarczych w danym regionie kraju. Dla potrzeb realizowanych w kompetencji SWO badań określono, iż współczynnik LQ stanowi relatywną ocenę koncentracji przedsiębiorstw upadłych w określonym regionie [ $E_{ij} / E_j$ ] względem liczby przedsiębiorstw ogółem, przynależnych do analizowanej zbiorowości w gospodarce w stosunku do wszystkich podmiotów, funkcjonujących w gospodarce narodowej [ $E_{in} / E_n$ ]. Miarę tę określa się następującym wzorem:

$$LQ = \frac{\frac{\sum E_{ij}}{\sum E_j}}{\frac{\sum E_{in}}{\sum E_n}}$$

gdzie:

$LQ$  – współczynnik lokalizacji,

$E_{ij}$  – liczba przedsiębiorstw, które postawione zostały w stan upadłości w danym regionie (województwie),

$E_j$  – liczba przedsiębiorstw w regionie,

$E_{in}$  – liczba przedsiębiorstw, które postawione zostały w stan upadłości ogółem,

$E_n$  – łączna liczba przedsiębiorstw ogółem.

Ponieważ współczynnik LQ służy określaniu poziomu natężenia badanego zjawiska w danym regionie w relacji do całej gospodarki, przyjmuje się, iż LQ przekraczające wartość 1 oznacza ponadprzeciętną koncentrację analizowanego zjawiska w danym regionie.

W celu zobrazowania względnej skali analizowanego zjawiska w poszczególnych regionach (województwach) oraz grupach podmiotów (formach organizacyjno-prawnych), wykorzystana zostanie metodologia **Regionalnego Barometru Upadłości (RBU)**. Ocena poziomu natężenia procesów upadłościowych w różnych regionach przeprowadzona zostanie przy wykorzystaniu wcześniej omówionej metodologii LQ. Dzięki wykorzystaniu wskaźnika RBU możliwe jest stworzenie chronologicznej listy województw, wskazując tym samym obszary o nadmiernej i poniżej przeciętnej koncentracji procesów upadłościowych.

## 1.8.2. ZMIANY POTENCJAŁU I WYNIKÓW EKONOMICZNO-FINANSOWYCH PRZEDSIĘBIORSTW

Zdolność przedsiębiorstwa do osiągnięcia wyników ekonomicznych, lub co ważniejsze do utrzymania się w rynku i kontynuowania działalności gospodarczej w przyszłości, jest uzależniona zarówno od sprzyjających, jak i niesprzyjających warunków otoczenia, a także od posiadanego przez przedsiębiorstwo potencjału ekonomiczno-finansowego.

Potencjał i wyniki ekonomiczno-finansowe przedsiębiorstwa są pojęciami złożonymi i wielowymiarowymi. Na potencjał wytwórczy składają się liczne i zróżnicowane składniki, natomiast o potencjale dochodowym decyduje poziom osiągniętych przez przedsiębiorstwo wyników ekonomicznych. Potencjał ekonomiczno-finansowy nie jest więc pojęciem łatwo kwantyfikowalnym. Dodatkowym utrudnieniem w jego pomiarze jest brak wystarczającego dostępu do danych liczbowych, co często wymusza konieczność zawężenia zakresu składników i mierników kwantyfikujących potencjał i wyniki ekonomiczno-finansowe przedsiębiorstwa. W związku z tym potencjał wytwórczy zostanie scharakteryzowany na podstawie takich jego składników, jak: majątek, zatrudnienie oraz kapitał z określeniem źródeł jego pochodzenia. Z kolei potencjał dochodowy, a w tym wyniki ekonomiczne stanowiące efekty brutto i netto wykorzystania składników potencjału wytwórczego zostaną scharakteryzowane poprzez takie składniki, jak: przychody ze sprzedaży oraz wynik finansowy na poszczególnych obszarach działalności.

Poziom oraz zmiany potencjału i wyników ekonomiczno-finansowych przedsiębiorstw w Polsce w zdefiniowanym okresie badań zostaną opisane z wykorzystaniem dostępnych oraz powszechnie uznanych zarówno w literaturze, jak i praktyce działalności gospodarczej **mierników potencjału i wyników ekonomiczno-finansowych** wyrażonych w ujęciu bezwzględnym i względnym. Pomiar i ocena poziomu oraz kierunków zmian tych mierników umożliwią identyfikację korzystnych bądź niekorzystnych tendencji sygnalizujących przede wszystkim pogarszanie się wyników ekonomiczno-finansowych, a więc pogarszanie się i/lub utratę potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa, i utratę zdolności rozwojowych przez przedsiębiorstwo. Tym samym w płaszczyźnie SWO w ujęciu jednowymiarowym zmiany te, w porównaniu do przyjętych kryteriów identyfikacji, będzie można interpretować, jako sygnały ostrzegawcze wskazujące na występowanie symptomów zagrożenia dalszej aktywności gospodarczej przedsiębiorstwa, włącznie z możliwością jej zaprzestania w przyszłości.

W analizie zmian potencjału i wyników ekonomiczno-finansowych z wykorzystaniem przyjętych mierników identyfikacji silnych bądź słabych sygnałów ostrzegawczych, stosowane będzie podejście eksperckie oraz z zakresu analizy statystycznej z wykorzystaniem:

- średnich branżowych – pochodzących z analizy zasobu informacji zasilających oraz dostępnych informacji z analiz zewnętrznych,
- wielkości krytycznych – zdefiniowanych, jako silne sygnały ostrzegawcze,
- przedziałów wzorcowych – uwzględniające prawidłowości ekonomiczne oraz związki przyczynowo-skutkowe,
- dopuszczalnych górnych i dolnych poziomów zmienności i stabilności odchyłeń – wyznaczanych na podstawie wielkości średnich, przy przyjętych poziomach wiarygodności (możliwe jako granice górne/dolne, zewnętrzne/wewnętrzne).

Zatem na podstawie analizy poziomu oraz kierunków i tendencji zmian przyjętych mierników i ich wielkości możliwe będzie opisanie aktualnej i przewidywanej sytuacji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw oraz ich klasyfikacja na:

- podmioty posiadające „dobrą” kondycję ekonomiczno-finansową, a więc niezagrożone upadłością,
- podmioty posiadające niejednoznaczną kondycję ekonomiczno-finansową, a więc znajdujące się w sytuacji, w której trudno określić zagrożenie upadłością,
- podmioty posiadające „złą” kondycję ekonomiczno-finansową, a więc zagrożone upadłością.

Mierniki potencjału i wyników ekonomiczno-finansowych przedsiębiorstw będą stanowić wybrane wielkości ekonomiczne charakteryzujące składniki tego potencjału w postaci: liczby pracujących, wartości majątku ogółem, majątku trwałego, majątku obrotowego, kapitału własnego, kapitału obcego długoterminowego, kapitału obcego krótkoterminowego, przychodów ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów, wartość wyniku finansowego na poszczególnych obszarach działalności oraz nakłady inwestycyjne na środki trwałe.

Analiza wymienionych wielkości ekonomicznych w ujęciu względnym z wykorzystaniem wskaźników tempa pozwoli na ustalenie poziomu oraz kierunków zmian potencjału i wyników ekonomiczno-finansowych przedsiębiorstw. Na tej podstawie będzie można ocenić zmiany stopnia wykorzystania składników potencjału ekonomiczno-finansowego, a w tym zmniejszenie zdolności rozwojowej przedsiębiorstwa, co w porównaniu z przyjętymi kryteriami identyfikacji sygnałów ostrzegawczych pozwoli określić wystąpienie symptomów zagrożenia dalszej aktywności gospodarczej (tabela 1.2).



**Tabela 1.2. Analiza potencjału i wyników ekonomicznych przedsiębiorstw**

Miernik potencjału i wyników ekonomicznych	Zakres analizy	wskaźnik	symbol
<b>liczba pracujących</b>	zmiana liczby pracujących	indeks tempa	<b>D<sub>LP</sub></b>
<b>majątek ogółem</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>A</sub></b>
<b>majątek trwały</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>AT</sub></b>
<b>majątek obrotowy</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>AO</sub></b>
<b>kapitał własny</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>KW</sub></b>
<b>kapitał obcy długoterminowy</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>KODŁ</sub></b>
<b>kapitał obcy krótkoterminowy</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>KOKR</sub></b>
<b>przychody ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>SP</sub></b>
<b>wynik finansowy na działalności operacyjnej</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>WFO</sub></b>
<b>wynik finansowy netto</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>WFN</sub></b>
<b>nakłady inwestycyjne na środki trwałe</b>	zmiana wartości	indeks tempa	<b>D<sub>NINW</sub></b>

Źródło: opracowanie własne na podstawie źródłowych pozycji literaturowych zawartych w wykazie bibliografii.

gdzie:

D<sub>LP</sub> – tempo zmian liczby pracujących (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>A</sub> – tempo zmian wartości aktywów (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>AT</sub> – tempo zmian wartości aktywów trwałych (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>AO</sub> – tempo zmian wartości aktywów obrotowych (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>KW</sub> – tempo zmian wartości kapitału własnego (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>KODŁ</sub> – tempo zmian wartości kapitałów obcych długoterminowych (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>KOKR</sub> – tempo zmian wartości kapitałów obcych krótkoterminowych (w%, R<sub>1-1</sub>=100%).

D<sub>SP</sub> – tempo zmian wartości przychodów ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów (w%, R<sub>1-1</sub>=100%),

D<sub>WFO</sub> – tempo zmian wartości wyniku finansowego na działalności operacyjnej (w%, R<sub>1-1</sub>=100%).

D<sub>WFN</sub> – tempo zmian wartości wyniku finansowego netto (w%, R<sub>1-1</sub>=100%).

D<sub>NINW</sub> – tempo zmian wartości nakładów inwestycyjnych na środki trwałe (w%, R<sub>1-1</sub>=100%).

$$D_{LP} = \frac{L_{P1} - L_{P0}}{L_{P0}} \times 100$$

$$D_A = \frac{A_1 - A_0}{A_0} \times 100$$

$$D_{AT} = \frac{A_{T1} - A_{T0}}{A_{T0}} \times 100$$

$$D_{AO} = \frac{A_{O1} - A_{O0}}{A_{O0}} \times 100$$

$$D_{KW} = \frac{K_{W1} - K_{W0}}{K_{W0}} \times 100 \quad D_{KOD\dot{L}} = \frac{K_{OD\dot{L}1} - K_{OD\dot{L}0}}{K_{OD\dot{L}0}} \times 100 \quad D_{KOKT} = \frac{K_{KOKT1} - K_{KOKT0}}{K_{KOKT0}} \times 100$$

$$D_{PNS} = \frac{P_{NS1} - P_{NS0}}{P_{NS0}} \times 100$$

$$D_{WFO} = \frac{WF_{O1} - WF_{O0}}{WF_{O0}} \times 100 \quad D_{WFN} = \frac{WF_{N1} - WF_{N0}}{WF_{N0}} \times 100$$

$$D_{NINW} = \frac{N_{INW1} - N_{INW0}}{N_{INW0}} \times 100$$

gdzie:

$t_1$  – okres bieżący,

$t_0$  – okres poprzedzający,

$L_p$  – liczba pracujących,

$A$  – wartość aktywów ogółem,

$A_T$  – wartość aktywów trwałych,

$A_O$  – wartość aktywów obrotowych,

$K_W$  – wartość kapitału własnego,

$K_{OD\dot{L}}$  – wartość kapitału obcego długoterminowego,

$K_{OKR}$  – wartość kapitału obcego krótkoterminowego (zobowiązania bieżące),

$P_{NS}$  – wartość przychodów netto ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów,

$WF_O$  – wynik finansowy na działalności operacyjnej,

$WF_N$  – wynik finansowy netto,

$N_{INW}$  – nakłady inwestycyjne na środki trwałe.

Kapitał obcy długoterminowy = rezerwy długoterminowe + zobowiązania długoterminowe + długoterminowe RM/O

Kapitał obcy krótkoterminowy (zobowiązania bieżące) = rezerwy krótkoterminowe + zobowiązania krótkoterminowe + krótkoterminowe RM/O

Wśród mierników służących do analizy poziomu i kierunków zmian potencjału i wyników ekonomicznych przedsiębiorstw stosowane są takie wskaźniki analizy potencjału i wyników ekonomicznych przedsiębiorstw. Stanowią one relacje podstawowych wielkości ekonomicznych (składników potencjału ekonomiczno-finansowego), które wyjaśniają określone zależności przyczynowo-skutkowe i prawidłowości ekonomiczno-finansowe zachodzące pomiędzy nimi. Fakt, że pomiędzy składnikami potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstw zachodzą relacje komplementarności i substytucyjności, skłania do porównywania ich ze sobą. Podstawową miarą wzrostu potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa jest wzrost nakładów inwestycyjnych, w efekcie których będzie następował przyrost majątku i techniczne uzbrojenie pracy. Z kolei przyrost pracy ludzkiej (zatrudnienia) powinien przyczynić się do intensywniejszego wykorzystania składników majątkowych, których wykorzystanie ma przynieść w efekcie nowo wytworzone produkty, których pochodną będą przychody ze sprzedaży i osiągnane wyniki ekonomiczn0-

finansowe. Zatem wskaźniki stosowane w analizie potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa służą do oceny intensywności wykorzystania składników tego potencjału, a także możliwości rozwojowych przedsiębiorstwa, bądź identyfikacji sytuacji zagrożenia dalszej aktywności ekonomiczno-finansowej. Do najczęściej stosowanych wskaźników analizy poziomu i kierunków zmian potencjału ekonomiczno-finansowego należą:

- **inwestochłonność** – mierzy efektywność nakładów inwestycyjnych i stanowi relację nakładów inwestycyjnych do przychodów ze sprzedaży:

$$I_{NW} = \frac{N_{INW}}{P_{NS}}$$

Wskaźnik inwestochłonności oznacza wartość nakładów inwestycyjnych zaangażowaną dla uzyskania jednostki wartości efektów wytwórczych w postaci przychodów ze sprzedaży. Wzrost wskaźnika produktywności majątku i jednocześnie zmniejszenie wskaźnika inwestochłonności oznacza wzrost efektów generowanych przez składniki potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa (efektywniejsze ich wykorzystanie), co jest równoznaczne ze wzrostem tego potencjału. W okresach, w których ponoszone są nakłady inwestycyjne w oczekiwaniu na wzrost zdolności rozwojowych przedsiębiorstwa, wskaźnik będzie wykazywał tendencję rosnącą co mogłoby sugerować mniejszą efektywność i zdolność dochodową ponoszonych nakładów inwestycyjnych, w wyniku których tworzone są czynniki wytwórcze. Wniosek taki miałby uzasadnienie tylko wówczas, gdy w okresie następującym po zakończeniu działań inwestycyjnych (poniesieniu nakładów) wskaźnik nadal będzie się utrzymywał na poziomie wyższym, w porównaniu do poziomu wskaźnika przed rozpoczęciem działań inwestycyjnych. Wzrost efektywności wykorzystania składników potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa i jego zdolności rozwojowych (dochodowych) będzie charakteryzowany przez tendencję malejącą wskaźnika po zakończeniu działań inwestycyjnych,

- **produktywność majątku** – stanowi relację przychodów do wartości aktywów posiadanych przez przedsiębiorstwo:

$$P_M = \frac{P_{NS}}{A}$$

Przyrost efektów produkcyjnych (przychodów) jest możliwy poprzez zwiększenie zaangażowania majątkowych czynników wytwórczych (wzrost potencjału ekonomiczno-finansowego poprzez wzrost jego składników), jednak jest to uzależnione od możliwości inwestycyjnych przedsiębiorstwa i skłonności do inwestowania, która z kolei zależy od tego, czy dokonane inwestycje majątkowe będą zdolne do generowania przychodów w przyszłości. Wskaźnik produktywności majątku umożliwia więc syntetyczną ocenę efektywności gospodarowania materialnymi i niematerialnymi czynnikami wytwórczymi, bowiem na podstawie tego wskaźnika można określić intensywność wykorzystania składników potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa w postaci majątku oraz zdolność majątku do generowania efektów produkcyjnych (przychodów).

Oczekiwana jest tendencja rosnąca wskaźnika, jakkolwiek w okresie, w którym ponoszone są nakłady inwestycyjne na środki trwałe nie następuje jeszcze uzyskiwanie efektów z inwestycji, dlatego też poziom wskaźnika produktywności będzie wykazywał w takiej sytuacji tendencję malejącą. Niekoniecznie oznacza to sytuację negatywną, bowiem celem działań inwestycyjnych jest uzyskanie większej skali efektów po zakończeniu działań rozwojowych, dlatego tendencje zmian wskaźnika produktywności należy analizować w określonym przedziale czasu,

- **techniczne uzbrojenie pracy** – stanowi relację majątku do liczby pracujących:

$$T_{UP} = \frac{A}{L_P}$$

Wskaźnik określa stopień wyposażenia pracowników w rzeczowe i nierzeczowe czynniki wytwórcze (składniki majątkowe) wykorzystywane w pracy i wspierające tą pracę. Wzrost wskaźnika oznacza wzrost stopnia wyposażenia pracowników w czynniki wytwórcze w efekcie poniesionych nakładów inwestycyjnych lub zmniejszenia liczby pracujących przy niezmienionej wartości materialnych i niematerialnych czynników wytwórczych (majątku). Wzrost wyposażenia przedsiębiorstwa i jego pracowników w czynniki wytwórcze potęguje siłę produkcyjną i zastępuje lub ułatwia pracę ludzką, stwarzając możliwość osiągnięcia wyższej produktywności majątku i wydajności zatrudnienia, a więc wzrostu potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa,

- **wydajność zatrudnienia** – określa wygenerowane przez pracowników efekty, które najlepiej wyrazić w postaci nowo wytworzonych produktów, których pochodną są przychody ze sprzedaży. Wskaźnik określa, jaka część sprzedaży przypada na jednego pracownika, a więc zdolność pracownika do generowania przychodów:

$$W_Z = \frac{P_{NS}}{L_P}$$

Wzrost potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa w postaci wzrostu zasobów pracy ludzkiej powinien przyczyniać się do wzrostu efektywności (wydajności) tego potencjału, czego wyrazem ma być większa zdolność pracowników do generowania efektów w postaci wytworzonych produktów, których sprzedaż generuje przychody. Oczekiwana jest tendencja rosnąca wskaźnika, jako zjawisko pozytywne.

Powyższe wskaźniki analizy potencjału i wyników przedsiębiorstw służącymi do oceny efektywności wykorzystania składników potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa można rozpatrywać łącznie, uwzględniając dodatkowo dynamikę zmian ich wielkości, bowiem wzrost nakładów inwestycyjnych przyczynia się do wzrostu wartości majątku i technicznego uzbrojenia pracy w oczekiwaniu na większą zdolność dochodową przedsiębiorstwa (produktywność i wydajność). W związku z tym dokonując analizy efektywności wykorzystania składników potencjału ekonomicznego przedsiębiorstw, konieczne jest ustalenie nie tylko stopnia, lecz także przyczyn zmian w poziomie efektywności gospodarowania składnikami potencjału ekonomicznego. W tym

celu wykorzystuje się **modele następstwa czasowego wskaźników kwantytatywnych oraz kwalitatywnych**. W modelach tych znajdują zastosowanie znane prawidłowości i tendencje ekonomiczne, które powinny zachodzić pomiędzy poszczególnymi wskaźnikami. Na tej podstawie poszczególne wskaźniki umieszcza się według rosnącej skali dynamiki (kolejny wskaźnik ma mieć szybszy wzrost od poprzedniego), a następnie ustala się układy nierówności:

- **wzorcowy układ nierówności wskaźników kwantytatywnych** posiada postać:

$$iL_P < iA < iP_{NS} < iWF_N$$

gdzie:

$i$  – indeks tempa,

$L_P$  – liczba pracujących,

$A$  – wartość aktywów ogółem,

$P_{NS}$  – przychody netto ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów,

$WF_N$  – wynik finansowy netto.

Analizując powyższą nierówność można formułować następujące wnioski cząstkowe:

**$iL_P < iA$**  – większa dynamika zmian majątku niż zatrudnienia może świadczyć o rosnącym wyposażeniu przedsiębiorstwa w składniki majątku trwałego i obrotowego, stwarzające możliwość rozszerzenia działalności produkcyjnej,

**$iA < iP_{NS}$**  – większa dynamika zmian przychodów ze sprzedaży niż majątku może się wiązać z większą produktywnością zaangażowanego majątku oraz efektywnymi usprawnieniami techniczno–organizacyjnymi,

**$iP_{NS} < iWF_N$**  – większa dynamika zmian wyniku finansowego może wynikać z osiągnięcia wyższych cen sprzedaży lub być rezultatem racjonalnego wykorzystania ogółu czynników działalności gospodarczej, prowadzącego do obniżenia kosztów własnych,

- **wzorcowy układ nierówności wskaźników kwalitatywnych** posiada postać:

$$iT_{UP} < iP_M < iW_Z < iROS < iROA < iRL_P$$

gdzie:

$T_{UP}$  – techniczne uzbrojenie pracy. Określa przeciętne zaangażowanie składników majątku na jednego zatrudnionego (wartość aktywów/liczba pracujących),

$P_M$  – produktywność majątku (przychody netto ze sprzedaży/wartość aktywów),

$W_Z$  – wydajność zatrudnienia, wydajność pracy jednego zatrudnionego (przychody netto ze sprzedaży/liczba pracujących),

$ROS$  – rentowność netto sprzedaży,

$ROA$  – rentowność netto majątku,

$RL_P$  – rentowność netto pracy jednego zatrudnionego.

Analizując powyższą nierówność można formułować następujące wnioski cząstkowe:

**$iT_{UP} < iP_M$**  – w warunkach gospodarki intensywnej, obrotowość majątku powinna zwiększać się szybciej niż wartość składników majątkowych zaangażowanych przeciętnie na jednego zatrudnionego. Powinien to być taki zespół składników majątku trwałego i

obrotowego, który będzie stwarzać możliwości efektywnego wzrostu przychodów ze sprzedaży,

$iP_M < iW_Z$  – właściwe wykorzystanie zaangażowanych zasobów osobowych i majątkowych, będzie prowadzić do wzrostu wydajności pracy jednego zatrudnionego,

$iW_Z < iROS$  – wzrost wydajności pracy mniejszy od dynamiki rentowności sprzedaży może świadczyć o korzystnym dla przedsiębiorstwa kształtowaniu się cen sprzedaży i kosztów własnych,

$iROS < iROA$  – większa dynamika rentowności majątku niż rentowności sprzedaży może mieć źródło, niezależnie od wymienionych czynników, w racjonalizacji zaangażowania majątku trwałego i obrotowego,

$iROA < iRL_p$  – dynamika rentowności pracy większa od dynamiki majątku świadczy o większej efektywności ekonomicznej pracy osób zatrudnionych.

Uszczegółowieniem analizy ekonomiczno-finansowej jest **analiza wskaźnikowa** wykorzystująca jednowymiarowe narzędzia analityczne w postaci wskaźników i ich grup. Wskaźniki te pełnią bardzo ważną funkcję, ponieważ wynik pomiaru w dużym stopniu zależy od przyjętego wskaźnika i użytych do jego formuły mierników, tym bardziej, że w systemie analizy działalności gospodarczej przedsiębiorstw miernikom tym przypisuje się różne funkcje. Celem tej analizy jest badanie poziomu kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw oraz kierunków i tendencji zmian tej kondycji, co w porównaniu z przyjętymi kryteriami identyfikacji sygnałów ostrzegawczych pozwoli określić występowanie symptomów zagrożenia upadłością.

Jednowymiarowe narzędzia analityczne w postaci wskaźników ujęto w grupy umożliwiające analizę:

- ogólnej sytuacji finansowej,
- podstawowych obszarów analizy ekonomiczno-finansowej,
- zdolności kredytowej.

**Ogólną sytuację finansową przedsiębiorstwa** można syntetycznie opisać za pomocą wskaźnika o następującej formule:

$$W_{OSF} = \frac{K_W}{K_O} \div \frac{A_T}{A_O} = \frac{K_W}{A_T} \div \frac{K_O}{A_O}$$
$$W_{OSF} = \frac{S_K}{S_M} = \frac{Z_{KW}}{Z_{KO}}$$

gdzie:

$W_{OSF}$  – wskaźnik ogólnej sytuacji finansowej,

$S_K$  – wskaźnik struktury kapitału,

$S_M$  – wskaźnik struktury majątku,

$Z_{KW}$  – wskaźnik zastosowania kapitału własnego,

$Z_{KO}$  – wskaźnik zastosowania kapitału obcego,

$K_W$  – kapitał własny,

$K_O$  – kapitał obcy (zobowiązania i rezerwy na zobowiązania),

$A_T$  – aktywa trwałe,

$A_O$  – aktywa obrotowe.

Wskaźnik ogólnej sytuacji finansowej w ramach badania kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw będzie podlega porównaniu w czasie (do okresów poprzednich).

Uwzględniając złotą regułę bilansową wskazującą na właściwą strukturę kapitałowo-majątkową przedsiębiorstwa, optymalny (wzorcowy) poziom wskaźnika powinien wynosić 1. Wartość wskaźnika  $>1$  oznacza prawidłową strukturę kapitałowo-majątkową przedsiębiorstwa, utrzymywanie bieżącej zdolności do regulowania zobowiązań bieżących (płynność finansową), zdolności kredytową i minimalizację ryzyka finansowego. Tendencja rosną wskaźnika w wartościach  $>1$  oznacza pozytywne zmiany i umacnianie stabilnej sytuacji ekonomiczno-finansowej (małe zagrożenie upadłością ze względów ekonomiczno-finansowych).

Wartość wskaźnika  $<1$  oznacza niekorzystną strukturę kapitałowo-majątkową, zagrożenie płynności, utratę zdolności kredytowej i występowanie ryzyka finansowego. Im wartość wskaźnika bliższa 0, tym ryzyko bankructwa większe. Utrzymywanie się poziomów wskaźnika  $<1$  w krótkich okresach można interpretować, jako przejściowe kłopoty ekonomiczne, a wszelkie jego wzrosty ocenia się, jako zmiany pozytywne, ale pod warunkiem przybliżania się do poziomu 1. Jednak im dłuższy okres pozostawiania wskaźnika na poziomie oscylującym wokół 0 tym ryzyko bankructwa jest coraz większe oraz wzrasta prawdopodobieństwo jego wystąpienia. Poziom 0 wskaźnika oznacza wartość krytyczną.

**Podstawowe obszary analizy sytuacji ekonomiczno-finansowej** obejmują klasyczne grupy wskaźników analizujących sytuację ekonomiczno-finansową przedsiębiorstwa w najważniejszych obszarach działalności, tj. zadłużenia, płynności, sprawności działania i rentowności. W ramach tego obszaru analizy wyróżnia się wiele miar i wskaźników, które grupowane są w różnych układach klasyfikacyjnych. W tabeli 1.3 przedstawiono przyjęte w komponencie monitorowania SWO wskaźniki badania podstawowych obszarów sytuacji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstwa.

**Tabela 1.3. Podstawowe obszary analizy sytuacji ekonomiczno-finansowej**

Obszar analizy	Nazwa wskaźnika	Symbol
zadłużenie	wskaźnik samofinansowania	$W_{SF}$
	wskaźnik zadłużenia ogółem	$W_{ZO}$
	wskaźnik zadłużenia długoterminowego	$W_{ZDŁ}$
	wskaźnik zadłużenia krótkoterminowego	$W_{ZKR}$
	wskaźnik pokrycia aktywów trwałych kapitałem stałym	$W_{PATKS}$
płynność finansowa	wskaźnik płynności bieżącej	$W_{PB}$
	wskaźnik płynności szybkiej	$W_{PSZ}$
	wskaźnik płynności środków pieniężnych	$W_{PŚR}$
sprawność działania	wskaźnik cyklu konwersji zapasów w dniach	$C_Z$
	wskaźnik cyklu konwersji należności w dniach	$C_N$
	wskaźnik cyklu konwersji zobowiązań w dniach	$C_{ZKR}$
	wskaźnik cyklu konwersji gotówki w dniach	$C_{GOT}$
	wskaźnik cyklu kapitału obrotowego netto w dniach	$C_{KON}$
rentowność	wskaźnik rentowności netto sprzedaży	ROS
	wskaźnik rentowności operacyjnej sprzedaży	ROOS
	wskaźnik rentowności netto aktywów	ROA
	wskaźnik rentowności operacyjnej aktywów	ROI
	wskaźnik rentowności netto kapitału własnego	ROE

Źródło: Opracowanie własne na podstawie źródłowych pozycji literaturowych zawartych w wykazie bibliografii.

**Wskaźniki zadłużenia** – informują o stopniu samofinansowania (niezależności finansowej), strukturze finansowania majątku przedsiębiorstwa, a także o strukturze kapitałowo-majątkowej. Z tego powodu wskaźniki te można rozpatrywać łącznie z grupą wskaźników analizujących zdolność kredytową przedsiębiorstwa. Poziom zadłużenia ma istotne znaczenie nie tylko z punktu widzenia wypłacalności przedsiębiorstwa, ale także ze względu na efekt jaki struktura finansowa wywiera na wynik finansowy. Z jednej strony, im wyższy jest udział kapitału obcego w finansowaniu, tym większe koszty finansowe i wpływ na obniżenie wyniku finansowego oraz wzrost prawdopodobieństwa wystąpienia problemów z wypłacalnością. Z drugiej strony wzrost zadłużenia może ujawnić dodatni efekt dźwigni finansowej i wzrost rentowności kapitałów własnych. Dzięki temu podmiot może rozwijać się znacznie szybciej niż z wyłącznym wykorzystaniem kapitałów własnych, generując dodatkowe zyski, znacznie przewyższające koszty obsługi długu.

Najważniejsze wskaźniki zadłużenia to:

- **wskaźnik samofinansowania** – określa stopień niezależności finansowej przedsiębiorstwa. Oczekiwane wartości powinny mieścić się w przedziale 0,5-1,0, tendencją wzrostową,
- **wskaźnik zadłużenia ogółem** – określa stopień zadłużenia, czy inaczej strukturę finansowania majątku przedsiębiorstwa. Informuje, jaki udział w strukturze finansowania aktywów stanowi kapitał obcy. Według standardów wskaźnik ten



powinien oscylować w przedziale 0,5-0,6. Im jest on wyższy, tym większy poziom zadłużenia, mniejszy stopień samofinansowania i wyższe ryzyko finansowe, jakkolwiek wysokość tego wskaźnika uzależniona jest od specyfiki branży, w której funkcjonuje podmiot,

- **wskaźnik zadłużenia długoterminowego** – określa udział kapitałów obcych długoterminowych w finansowaniu działalności przedsiębiorstwa. Racjonalny poziom tego wskaźnika powinien wynosić 0,3, co wynika ze struktury kapitału 33:67, według której zobowiązania długoterminowe powinny być dwukrotnie mniejsze od kapitałów własnych. W przypadku, gdy wskaźnik jest >0,5 oznacza to, że zobowiązania długoterminowe są większe od kapitału własnego,
- **wskaźnik zadłużenia krótkoterminowego** – określa udział kapitałów obcych krótkoterminowych w finansowaniu działalności przedsiębiorstwa. Racjonalny poziom tego wskaźnika powinien wynosić 0,2, jakkolwiek struktura zadłużenia i poziom zadłużenia krótkoterminowego zależy od rodzaju działalności oraz specyfiki branży. Im wyższy poziom wskaźnika, tym ryzyko wystąpienia bieżącej niewypłacalności może być coraz większe, dlatego też wskaźnik ten należy rozpatrywać łącznie ze wskaźnikiem pokrycia aktywów kapitałem stałym oraz wskaźnikami płynności,
- **wskaźnik pokrycia aktywów trwałych kapitałem stałym** – ujmuje istotę złotej reguły bilansowej, która wskazuje na konieczność pokrycia aktywów trwałych kapitałem trwale związanym z działalnością przedsiębiorstwa (kapitałem własnym i obcym długoterminowym) zapewniając dodatkowo dodatni kapitał obrotowy netto, co gwarantuje stabilność finansową i zmniejsza ryzyko finansowe. Poziom wskaźnika >1 oznacza, że kapitał stały w całości finansuje aktywa trwałe oraz część aktywów obrotowych, i dodatkowo występuje dodatni kapitał obrotowy netto. Wskaźnik =1 oznacza, że kapitał stały = aktywa trwałe, natomiast <1 oznacza, że kapitał stały tylko w części finansuje aktywa trwałe, które w pozostałej części finansuje kapitał obcy krótkoterminowy, przez co podmiot nie spełnia kryterium bieżącej płynności, posiada ujemny kapitał obrotowy netto i narażony jest na wystąpienie ryzyka finansowego związanego z niewypłacalnością.

Formuły wskaźników zadłużenia są następujące:

$$W_{SF} = \frac{K_W}{A}$$

$$W_{ZO} = \frac{K_O}{A} \quad W_{ZDŁ} = \frac{K_{ODŁ}}{A} \quad W_{ZKR} = \frac{K_{OKR}}{A}$$

$$W_{PATKS} = \frac{K_S}{A_T}$$

gdzie:

$W_{SF}$  – wskaźnik samofinansowania,

$W_{ZO}$  – wskaźnik zadłużenia ogółem,

$W_{ZDL}$  – wskaźnik zadłużenia długoterminowego,  
 $W_{ZKR}$  – wskaźnik zadłużenia krótkoterminowego,  
 $W_{PATKS}$  – wskaźnik pokrycia aktywów trwałych kapitałem stałym,  
 $K_W$  – kapitał własny,  
 $A$  – aktywa ogółem,  
 $A_T$  – aktywa trwałe,  
 $K_O$  – kapitał obcy (zobowiązania i rezerwy na zobowiązania),  
 $K_{ODL}$  – kapitał obcy długoterminowy,  
 $K_{OKR}$  – kapitał obcy krótkoterminowy,  
 $K_S$  – kapitał stały,  
Kapitał stały = kapitał własny + kapitał obcy długoterminowy

**Wskaźniki płynności** – informują o zdolności przedsiębiorstwa do terminowego regulowania zobowiązań bieżących. Utrzymanie tej zdolności powinno być zasadniczym celem zarządzania operacyjnego w obszarze finansowym w każdym przedsiębiorstwie bez względu na jego wielkość, branżę i rodzaj prowadzonej działalności. Utrata płynności finansowej jest początkiem bankructwa, bowiem przedsiębiorstwo, które nie jest w stanie wywiązywać się ze swoich zobowiązań, traci wiarygodność wobec pracowników, kontrahentów oraz instytucji finansujących, jak również zdolność do kontynuowania działalności w dłuższej perspektywie. W większości przypadków wskaźniki płynności obliczane są na podstawie danych bilansowych i w związku z tym mają charakter statyczny, a więc informują o poziomie płynności w danym momencie, tj. w dniu sporządzania bilansu.

Wyróżnia się trzy najważniejsze stopnie płynności:

- **wskaźnik płynności bieżącej** – informuje o zdolności przedsiębiorstwa do terminowego regulowania zobowiązań bieżących na podstawie stopnia ich pokrycia przez aktywa bieżące. Wzrost wskaźnika informuje o poprawie płynności finansowej, a spadek o jej pogorszeniu. Optymalny przedział dla wskaźnika przyjmuje się na poziomie 1,2-2,0, jakkolwiek przedział ten zależy od rodzaju działalności i specyfiki branży. Poziom 1,2 to wielkość krytyczna, poniżej którego mogą wystąpić trudności przedsiębiorstwa w regulowaniu zobowiązań bieżących. Z kolei przekroczenie poziomu 2,0 oznacza powstanie zjawiska nadpłynności co również oceniana jest się negatywnie,
- **wskaźnik płynności szybkiej** – określa stopień pokrycia zobowiązań krótkoterminowych aktywami obrotowymi o większym stopniu płynności. Optymalny przedział dla wskaźnika przyjmuje się na poziomie 1,0-1,2, co oznacza, że zobowiązania bieżące powinny być w całości pokryte przez inwestycje krótkoterminowe i należności bieżące.
- **wskaźnik płynności środków pieniężnych** – określa, jaka część zobowiązań krótkoterminowych może być regulowana aktywami nie związanymi procesami operacyjnymi, tj. gotówką, papierami wartościowymi oraz innymi aktywami pieniężnymi. Przyjmuje się, że wskaźnik powinien oscylować na poziomie 0,2, jakkolwiek zależy to od rodzaju działalności i branży. Wielkości wskaźnika bliskie 0 oznaczają brak wolnych środków pieniężnych, co uniemożliwia szybką spłatę zobowiązań bieżących w razie wystąpienia takiej konieczności oraz brak możliwości zawieranie szybkich transakcji.

Formuły wskaźników płynności są następujące:

$$W_{PB} = \frac{A_O}{K_{OKR}} \quad W_{PSZ} = \frac{A_O - Z - K_{RM/O}}{K_{OKR}} \quad W_{P\acute{S}R} = \frac{I_{KT}}{K_{OKR}}$$

gdzie:

$W_{PB}$  – wskaźnik płynności bieżącej,

$W_{PSZ}$  – wskaźnik płynności szybkiej,

$W_{P\acute{S}R}$  – wskaźnik płynności środków pieniężnych,

$A_O$  – aktywa obrotowe,

$K_{OKR}$  – kapitał obcy krótkoterminowy (zobowiązania bieżące),

$Z$  – zapasy,

$K_{RM/O}$  – krótkoterminowe rozliczenia międzyokresowe kosztów,

$I_{KT}$  – inwestycje krótkoterminowe.

**Wskaźniki sprawności działania** – określają stopień wykorzystania majątku przedsiębiorstwa, jego produktywność oraz sprawność gospodarowania składnikami majątku obrotowego. Wskaźniki te mogą określać liczbę obrotów dokonywanych średnim stanem danego rodzaju aktywów (zapasów, należności, środków pieniężnych) w danym okresie (kwartalne, półroczne i roczne). Wskaźniki te mogą także określać cykle gospodarowania (obroty) składnikami aktywów obrotowych i zobowiązań bieżących w dniach. Informacja taka bardzo istotna w badaniu kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstwa i identyfikacji sygnałów ostrzegawczych pod kątem zagrożenia upadłością. Przy takim podejściu można ustalić średnią długość w dniach zamrożenia gotówki w cyklach operacyjnych oraz możliwości wystąpienia zatorów płatniczych. Długość poszczególnych cykli wraz z cyklem konwersji gotówki jest włącznie uzależniony od rodzaju działalności i specyfiki branży. Najważniejsze wskaźniki sprawności działania, to:

- **wskaźnik cyklu konwersji zapasów w dniach** – określa co ile dni przedsiębiorstwo odnawia swoje zapasy dla zrealizowania określonej sprzedaży. Niski poziom wskaźnika informuje o szybkim obrocie zapasami, co oznacza krótki okres zamrożenia środków pieniężnych w zapasach. Przedsiębiorstwa, których płynność finansowa jest zagrożona, także mogą posiadać niski poziom zapasów co może wynikać z braku źródeł finansowania. Sytuacja taka może mieć również związek z nieracjonalną gospodarką finansową (zakupów surowców i materiałów w małych, nieracjonalnych ekonomicznie partiach),
- **wskaźnik cyklu konwersji należności w dniach** – określa średni okres oczekiwania przedsiębiorstwa na zamianę należności na gotówkę (średni okres spływu należności, okres, w jakim przedsiębiorstwo kredytuje swoich odbiorców). Długość tego cyklu może wynikać z realizowanej polityki sprzedaży wobec odbiorców lub braku ich wypłacalności. Długie cykle zwiększają prawdopodobieństwo powstawania należności nieściągalnych oraz zatorów płatniczych. Im krótszy cykl należności, tym korzystniejsza sytuacja finansowa przedsiębiorstwa i mniejsze ryzyko finansowe,
- **wskaźnik cyklu konwersji zobowiązań w dniach** – określa średni okres, jaki upływa od powstania zobowiązania do jego spłaty (długość okresu kredytowania przedsiębiorstwa

przez dostawców). Wskaźnik powinien być wyższy od cyklu konwersji należności, jednak zbyt duża wartość wskaźnika może świadczyć o problemach płatniczych i groźbie niewypłacalności (upadłości),

- **wskaźnik cyklu konwersji gotówki w dniach** – określa czas zamrożenia gotówki w jednym (pełnym) cyklu operacyjnym, a więc czas, jaki upływa od momentu wydatkowania środków pieniężnych na odtworzenie zapasów i zapłatę zobowiązań bieżących poprzez realizację działalności operacyjnej i sprzedaży do momentu wpływu środków pieniężnych z tytułu sprzedaży. Czas ten skraca okres kredytowania działalności przez dostawców. Im wskaźnik mniejszy, tym okres zamrożenia gotówki w kolejnych cyklach operacyjnych jest krótszy. Cykl ten można regulować poprzez przyjęte strategie zarządzania elementami kapitału obrotowego netto, tj. poprzez skracanie cyklu konwersji zapasów i cyklu konwersji należności oraz wydłużanie cyklu konwersji zobowiązań,
- **wskaźnik cyklu kapitału obrotowego netto w dniach** – informuje, na ile dni obrotu wystarcza kapitału obrotowego netto (KON = Aktywa bieżące – Zobowiązania bieżące lub KON = Kapitał stały – aktywa trwałe).

Formuły wskaźników sprawności działania w dniach są następujące:

$$C_Z = \frac{Z_{\xi}}{P_{NS}} \times L_{DN} \quad C_N = \frac{N_{\xi}}{P_{NS}} \times L_{DN} \quad C_{ZKR} = \frac{Z_{KR\dot{S}}}{P_{NS}} \times L_{DN}$$

$$C_{GOT \text{ W DNIACH}} = C_Z + C_N - C_{ZKR}$$

$$C_{KON} = \frac{K_{ON\dot{S}}}{P_{SN}} \times L_{DN}$$

gdzie:

$C_Z$  – cykl zapasów w dniach,

$C_N$  – cykl należności w dniach,

$C_{ZKR}$  – cykl zobowiązań krótkoterminowych,

$C_{GOT}$  – cykl gotówki,

$C_{KON}$  – cykl kapitału obrotowego netto,

$P_{NS}$  – przychody netto ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów,

$Z_{\xi}$  – średni stan zapasów,

$N_{\xi}$  – średni stan należności,

$Z_{KR\dot{S}}$  – średni stan zobowiązań krótkoterminowych,

$K_{ON\dot{S}}$  – średni poziom kapitału obrotowego netto,

$L_{DN}$  – liczba dni w badanym okresie (kwartał – 90 dni, półrocze 180 dni, rok – 360 dni).

**Wskaźniki rentowności** – określają zyskowność (stopę zwrotu), bądź deficytowość obszarów działalności, tj. sprzedaży, gospodarowania majątkiem (inwestycji w majątek) oraz inwestycji w kapitał własny. W tej grupie wskaźników przyjęto:

- **wskaźnik rentowności sprzedaży** – określa stopę zwrotu netto ze sprzedaży. Jest to najbardziej zagregowany wskaźnik z tej grupy, bowiem na wynik finansowy netto wpływa wiele czynników, w tym także te, na których kształtowanie przedsiębiorstwo nie

ma wpływu (np. obciążenia podatkowe). Brak poziomu wzorcowego. Oczekiwana wartość  $>0$  z tendencją rosnącą,

- **wskaźnik rentowności operacyjnej sprzedaży** – w celu wyeliminowania powyżej wymienionych wpływów ustala się wskaźnik rentowności sprzedaży z uwzględnieniem zysku na działalności operacyjnej. Wskaźnik ten określa stopę zwrotu ze sprzedaży na poziomie operacyjnym, a więc bez obciążenia podatkowego i bez uwzględniania kosztów finansowych związanych z zadłużeniem. Brak poziomu wzorcowego. Oczekiwana wartość  $>0$  z tendencją rosnącą,
- **wskaźnik rentowności aktywów** – określa wielkości zysku przypadającego na zaangażowany w działalność gospodarczą majątek. Innymi słowy wskazuje ogólną zdolność aktywów przedsiębiorstwa do generowania zysków (bądź deficytu). Wzrastająca wartość wskaźnika świadczy o poprawiającej się zyskowności oraz zwiększeniu zdolności dochodowej majątku, tj. zdolności majątku do generowania zysku. Brak poziomu wzorcowego. Oczekiwana wartość  $>0$  z tendencją rosnącą,
- **wskaźnik rentowności operacyjnej aktywów** – formuła nie uwzględnia kosztów i przychodów finansowych, dzięki czemu wskaźnik ROI określa zdolność aktywów do generowania zysku, bez względu na to, w jaki sposób zostały one sfinansowane. Ponieważ koszt kapitału własnego nie jest w przeciwieństwie do kosztu kapitału obcego (koszty finansowe) odzwierciedlony w rachunku zysków i strat, wskaźnik ROI lepiej pod pewnymi względami charakteryzuje rzeczywistą zyskowność zaangażowanego majątku. Wartość wskaźnika ROI pokazuje, jaka jest zdolność aktywów do generowania zysku operacyjnego, z którego płacone są odsetki od wykorzystywanego kapitału obcego. A zatem wartość ROI pokazuje, jaki może być dla podmiotu maksymalny koszt długu, przy którym opłaca się z niego korzystać zakładając, że siła zarobkowa aktywów nie ulegnie zmianie. Zadłużanie się przy wyższym oprocentowaniu spowoduje, że koszt pozyskania kapitału obcego będzie wyższy, niż zdolność majątku, a konsekwencji do generowania zysku, co spowoduje tym większe obniżenie rentowności i zdolności dochodowych majątku i wzrost ryzyka finansowego i zagrożenia upadłością,
- **wskaźnik rentowności kapitału własnego** – określa stopę wyniku, jaką przynosi każda jednostka zaangażowana w kapitał własny (akcje, udziały, itp.) danego podmiotu gospodarczego. Powszechnie uznaje się, że jest to jeden z ważniejszych wskaźników rentowności, bowiem określa, jak efektywnie „pracuje” kapitał właściciela (jest rentowny czy deficytowy). Na rentowność zaangażowanych kapitałów wpływa wiele czynników: efektywność operacyjna wyrażana przez zyskowność sprzedaży, efektywność wykorzystania aktywów oraz dźwignia finansowa, czyli zaangażowanie kapitału obcego w celu zwiększenia zysku przypadającego na jednostkę kapitału własnego (wyraża to model DuPonta). Im niższy wskaźnik i/lub tendencja malejąca wskaźnika, tym ryzyko finansowe wyższe i większa możliwość zagrożenia aktywności gospodarczej włącznie z upadłością w związku z kumulowaniem się negatywnych efektów gospodarowania i zarządzania w sferach sprzedaży, gospodarowania majątkiem i finansowania działalności

(tendencja spadkowa nie może będzie występować w nieskończoność, występują bowiem zależności nieliniowe, kumulujące się).

Formuły przyjętych wskaźników rentowności są następujące:

$$ROS = \frac{WF_N}{P_{NS}} \times 100 \quad ROOS = \frac{WF_O}{P_{NS}} \times 100$$

$$ROA = \frac{WF_N}{A} \times 100 \quad ROI = \frac{WF_O}{A} \times 100$$

$$ROE = \frac{WF_N}{K_W} \times 100$$

gdzie:

ROS – rentowność sprzedaży,

ROOS – rentowność operacyjna sprzedaży,

ROA – rentowność aktywów,

ROI – rentowność operacyjna aktywów,

ROE – rentowność kapitałów własnych,

$WF_N$  – wynik finansowy (zysk/strata) netto,

$WF_O$  – wynik finansowy (zysk/strata) na działalności operacyjnej,

$P_{NS}$  – przychody netto ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów,

A – aktywa ogółem,

$K_W$  – kapitał własny.

Kolejna grupa wskaźników stosowana jest do **analizy zdolności kredytowej** przedsiębiorstw. Szczególne zainteresowanie tym obszarem ma związek z finansowaniem rozwoju działalności przedsiębiorstw, możliwością dodatkowego zadłużania się, i w końcu wpływem struktury kapitałowej na występowanie ryzyka finansowego i ryzyka upadłości. Analiza zadłużenia ma na celu określenie poziomu niezależności finansowej oraz ustalenie kierunków zmian struktury kapitałowej i kapitałowo-majątkowej przedsiębiorstwa. Istotne wydaje się więc nie tylko określenie stanu struktury kapitałowej i kapitałowo-majątkowej, ale także możliwe kierunki zmian tej struktury z określeniem dodatkowych możliwości zadłużenia się i zdolności podmiotu do obsługi długu w przyszłości. Rosnące potrzeby kapitałowe przedsiębiorstw oraz możliwość poprawy rentowności kapitałów własnych powodują, że podmioty zadłużają się (w określonych sytuacjach zadłużanie jest konieczne lub/i korzystne), a zgodnie z przyjętymi na potrzeby SWO kryteriami identyfikacji, określone relacje kapitałowo-majątkowe i możliwe kierunki ich zmian mogą sygnalizować powstawanie sygnałów ostrzegawczych w strukturze kapitałowo-majątkowej, wskazujących na wzrastające ryzyko finansowe i symptomy upadłości. Zatem struktura kapitałowa i określony stopień samofinansowania nie wyczerpują tzw. pojemności zadłużeniowej przedsiębiorstwa, a więc możliwości dalszego zadłużania się przez przedsiębiorstwo, w związku z czym równie istotna w tym względzie jest analiza pojemności zadłużenia przedsiębiorstwa, a więc analiza jego możliwości do dodatkowego zadłużania się oraz zdolności do obsługi i zwrotu zadłużenia.

Wskazuje to z jednej strony na istnienie dodatkowych obszarów ryzyka finansowego determinującego ryzyko upadłości, natomiast z drugiej strony stwarza możliwość, a zarazem konieczność przeprowadzenia pogłębionej analizy wskaźnikowej na potrzeby SWO w celu identyfikacji dodatkowych sygnałów ostrzegawczych wzmacniających (lub osłabiających w przypadku ich braku) symptomy upadłości przedsiębiorstwa. Szczególnie przydatne w analizie zdolności kredytowej są:

- **wskaźnik zdolności obsługi zadłużenia** – określa, w jakim stopniu przedsiębiorstwo jest w stanie obsłużyć zadłużenie, tj. w jakiej części może je pokryć zyskiem netto i amortyzacją. Im wyższy wskaźnik, tym zdolność obsługi zadłużenia większa. Oczekiwany poziom wskaźnika  $> 0$  z tendencją rosnącą. Tendencja malejąca i przybliżanie poziomu wskaźnika do 0 sygnalizuje spadek zdolności do obsługi zadłużenia oraz wzrost ryzyka finansowego. Gdy wartość wskaźnika oscyluje na poziomie 0 i utrzymuje się na tym poziomie dłużej niż 2 lata oznacza wartość krytyczną.
- **wskaźnik pokrycia zobowiązań nadwyżką finansową** – stanowi rozwinięcie wskaźnika zdolności obsługi zadłużenia uwzględniając wpływ odsetek od kapitału obcego na podstawę opodatkowania, przepływy pieniężne i tworzenie nadwyżki finansowej. Wskaźnik określa, w jakiej części przedsiębiorstwo może pokryć zadłużenie wygospodarowaną nadwyżką finansową osiągniętą w danym okresie. Im wyższy wskaźnik tym zdolność przedsiębiorstwa do obsługi zadłużenia większa. Oczekiwany poziom wskaźnika  $> 0$  z tendencją rosnącą. Tendencja malejąca i przybliżanie poziomu wskaźnika do 0 sygnalizuje spadek zdolności do obsługi zadłużenia oraz wzrost ryzyka finansowego. Utrzymywanie się wartości wskaźnika w granicach  $\geq 0 \leq$  powyżej 2 lat (8 kwartałów) może oznaczać trwałą utratę zdolności do obsługi długu i wysokie ryzyko upadłości,
- **wskaźnik okresu spłaty zadłużenia** – wyznacza minimalny okres spłaty zadłużenia, tj. okres w trakcie którego przedsiębiorstwo spłacałoby zadłużenie z bieżącej nadwyżki finansowej przy założeniu, że nie nastąpi wzrost zadłużenia, a osiągnięta nadwyżka finansowa nie ulegnie zmianie (np. roczna nadwyżka finansowa wyznaczy okres spłaty zadłużenia w latach, kwartalna w kwartałach itd.). Wzrost wartości nadwyżki skróci okres spłaty i odwrotnie. Zatem im niższy wskaźnik, tym krótszy okres pozostający do spłaty zadłużenia i tym większa (rosnąca) zdolność kredytowa przedsiębiorstwa. Oczekiwana tendencja malejąca wskaźnika,
- **wskaźnik zdolności kredytowej (pojemności zadłużeniowej)** – oznacza możliwość dodatkowego zadłużenia, którego spłatę zabezpieczą nadwyżka finansowa wygospodarowana w danym okresie i posiadane przez przedsiębiorstwo środki pieniężne. Minimalny poziom wskaźnika  $\geq 1$ . Im wartość wskaźnika wyższa od 1 tym zdolność kredytowa (pojemność zadłużeniowa) większa. Wartość wskaźnika  $\leq 1$  oznacza brak zdolności kredytowej i rosnące ryzyko finansowe.

Formuły wskaźników zdolności kredytowej są następujące:

$$W_{ZOZ} = \frac{WF_N + A_M}{K_O}$$

$$W_{PZNF} = \frac{WF_N + A_M + O_D}{K_O} \quad \text{lub} \quad W_{PZNF} = \frac{EBIT}{K_O}$$

$$W_{OSZ} = \frac{K_O}{WF_N + A_M + O_D} \quad \text{lub} \quad W_{OSZ} = \frac{K_O}{EBIT}$$

$$W_{ZK(PZ)} = \frac{WF_N + A_M + O_D}{K_O - I_K} \quad \text{lub} \quad W_{ZK(PZ)} = \frac{EBIT}{K_O - I_K}$$

gdzie:

$W_{ZOZ}$  – wskaźnik zdolności obsługi zadłużenia,

$W_{PZNF}$  – wskaźnik pokrycia zobowiązań nadwyżką finansową,

$W_{OSZ}$  – wskaźnik okresu spłaty zadłużenia,

$W_{ZK(PZ)}$  – wskaźnik zdolności kredytowej (pojemności zadłużeniowej),

$WF_N$  – wynik finansowy (zysk/strata) netto,

$EBIT$  – ( $WF_O$ ) wynik finansowy (zysk/strata) na działalności operacyjnej,

$A_M$  – amortyzacja,

$O_D$  – odsetki,

$K_O$  – kapitał obcy,

$I_K$  – inwestycje krótkoterminowe.

### 1.8.3. ANALIZA POZIOMU SYNTETYCZNEGO MIERNIKA ROZWOJU

W badaniu kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw, a w tym identyfikacji sygnałów ostrzegawczych wskazujących na wystąpienie symptomów upadłości, alternatywą dla analizy pojedynczych zmiennych (wskaźników) i ich grup jest podejście wykorzystujące mierniki syntetyczne (zmienne syntetyczne).

Miary/wskaźniki syntetyczne wykorzystują odpowiednio wyselekcjonowane zmienne diagnostyczne, których dobór najczęściej przeprowadza się poprzez przyjęcie zbioru zmiennych charakteryzujących badane zjawisko. Wśród zmiennych diagnostycznych stosowanych we wskaźniku syntetycznym, ze względu na kierunek wpływu na badane zjawisko wyróżnia się:

- stymulanty – zmienne, których wzrost wartości świadczy o pożądanym rozwoju badanego zjawiska,
- destymulanty – zmienne, których spadek wartości świadczy o pożądanym rozwoju badanego zjawiska,



- nominanty – zmienne, które charakteryzują się określonym poziomem nasycenia (wartością nominalną), od którego odchylenia oznaczają niepożądany rozwój zjawiska.

Podstawą do konstrukcji miary/wskaźnika syntetycznej jest macierz o obserwacji:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$x_{it}$  – wartość  $i$ -tej zmiennej diagnostycznej ( $i = 1, \dots, m$ ) w momencie lub okresie  $t$  ( $t = 1, \dots, n$ ).

Zmienne diagnostyczne mogą nosić różne miana, co może utrudniać, a w skrajnych przypadkach nawet uniemożliwiać ich bezpośrednie porównywanie. W związku z tym, zmienne diagnostyczne sprowadza się do porównywalności przez normalizację w następujący sposób:

- dla stymulant:

$$z_{it} = \frac{x_{it}}{\max_t \{x_{it}\}} ; \quad \max_t \{x_{it}\} > 0$$

- dla destymulant:

$$z_{it} = \frac{\min_t \{x_{it}\}}{x_{it}} ; \quad x_{it} > 0$$

- dla nominant:

$$z_{it} = \frac{x_{it}}{\text{nom}x_{it}} ; \quad x_{it} \leq \text{nom}x_{it}$$

$$z_{it} = \frac{\text{nom}x_{it}}{x_{it}} ; \quad x_{it} > \text{nom}x_{it}$$

gdzie:

$\text{nom}x_{it}$  – to poziom nominalny  $i$ -tej zmiennej.

Wykorzystane przy normalizacji wartości:

$$\max_t \{x_{it}\}, \min_t \{x_{it}\}, \text{nom}x_{it}$$

określają współrzędne tzw. obiektu wzorcowego, który charakteryzują najlepsze lub oczekiwane wartości zmiennych w próbie. Wielkości te są stałe w badanym okresie. Postać zmiennej syntetycznej może być następująca:

$$z_t = \sum_{i=1}^m z_{it} \quad \text{lub} \quad z_t' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_{it}$$

Zmienna syntetyczna  $z_t'$  będzie przyjmować wartości z przedziału  $[0,1]$ , przy czym wartość równa 1 będzie osiągnięta przez wskaźnik syntetyczny dla obiektu wzorcowego. Odległość między profilem obiektu wzorcowego a profilem badanego obiektu (obiektów) w danym okresie  $t$ , oznacza dystans dzielący obiekt od wzorca w tymże okresie  $t$ . Zgodnie z przyjętymi kryteriami identyfikacji zdiagnozowaną różnicę będzie można zakwalifikować (bądź nie), jako sygnał ostrzegawczy wskazujący na wystąpienie symptomów bankructwa.

Przyjęcie stałego wzorca oznacza jednak, że każdy obiekt w różnych okresach  $t$  ma wytyczone takie same cele. Założenie takie nie zawsze jest zasadne, dlatego wskaźnik syntetyczny można skonstruować z uwzględnieniem wzorca ruchomego i zmiennych diagnostycznych w postaci stymulant i destymulant. Procedura konstrukcji wskaźnika syntetycznego będzie następująca:

- dla stymulant:

$$z_{it} = \frac{x_{it}}{x_{it}^0} ; \quad x_{it}^0 \neq 0$$

- dla destymulant:

$$z_{it} = \frac{x_{it}^0}{x_{it}} ; \quad x_{it}^0 \neq 0$$

gdzie:

$x_{it}$  – wartość  $i$ -tej zmiennej diagnostycznej w momencie lub okresie  $t$ , opisującej obiekt wzorcowy.

Współrzędne wzorca ruchomego mogą być wyznaczone poprzez przyjęcie jako wzorców większej liczby obiektów wyżej rozwiniętych i traktowanie ich jako współrzędnych abstrakcyjnego wzorca określanego dla każdego momentu lub okresu.

Agregacja wartości  $z_{it}$  w zmienną syntetyczną może być następująca:

$$w_t = \sum_{i=1}^m z_{it}$$

jednak uzyskana w ten sposób zmienna syntetyczna nie będzie unormowana, dlatego też normalizacja tej zmiennej do przedziału  $[0, 1]$  może być dokonana w następujący sposób:

$$w_{it} = \frac{z_{it}}{\max_t \{z_{it}\}}$$

$$w_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_{it}$$

Najmniej korzystna wartość dla wskaźnika syntetycznego  $w_t = 0$ , natomiast najbardziej korzystna wynosi 1.

Przyszłe wartości wskaźnika syntetycznego (syntetycznego wskaźnika rozwoju przedsiębiorstwa) z uwzględnieniem wahań sezonowych mogą być wyznaczone na podstawie wybranych modeli szeregów czasowych na dwa sposoby, tj. prognozując wskaźnik syntetyczny lub prognozując zmienne diagnostyczne stanowiące składowe miernika syntetycznego, które w następnej kolejności można agregować (syntetyzować) według podanych wyżej procedur.

Model szeregu czasowego pozwala określić przyszłą wartość zmiennej prognozowanej  $Y$  w prognozowanym momencie lub okresie  $t$  – a więc  $y_t^*$ . Prognoza zmiennej  $Y$  na moment  $t$  – czyli  $y_t^*$  jest wartością funkcji  $f$  zależnej od: czasu, przeszłych wartości  $i$ /lub prognoz tej zmiennej:

$$y_t^* = f(t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, y_{t-1}^*, \dots, y_{t-p}^*, \varepsilon_t)$$

gdzie:

$y_t^*, y_{t-1}^*, \dots, y_{t-p}^*$  – prognozy zmiennej  $Y$  wyznaczone na moment lub okres  $t, t-1, \dots, t-p$ ,  
 $y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$  – zaobserwowane wartości zmiennej  $Y$  w momencie lub okresie  $t-1, \dots, t-p$ ,  
 $t$  – zmienna czasowa,  
 $p$  – wielkość opóźnienia,  
 $\varepsilon$  – składnik losowy.

Funkcja czasu  $f(t)$  charakteryzująca tendencję rozwojową nazywana jest funkcją trendu, natomiast określenie funkcji trendu polega na znalezieniu funkcji  $f(t)$  optymalnie pasującej do wyrazów szeregu czasowego zmiennej prognozowanej. Wyodrębnienie tendencji rozwojowej na podstawie funkcji trendu można dokonać z wykorzystaniem:

- funkcji liniowej – postać funkcji:  $y_t = \alpha + \beta t$  przy czym  $\beta > 0$
- funkcji wykładniczej – postać funkcji:  $y_t = \alpha \beta^t$  przy czym  $\beta > 1$
- funkcji potęgowej – postać funkcji:  $y_t = \alpha t^\beta$  przy czym  $0 < \beta < 1$
- funkcji logarytmicznej – postać funkcji:  $y_t = \alpha + \beta \ln t$  przy czym  $\beta > 0$

gdzie:

$y_t$  – wartość zmiennej  $Y$  w momencie lub okresie  $t$ ,  
 $\alpha, \beta$  – parametry modelu.

Ocena dopasowania modelu do danych empirycznych i wybór funkcji trendu najlepiej opisującej tendencję rozwojową przedsiębiorstwa może być dokonana na podstawie współczynnika determinacji, który jest miarą dopasowania modelu do danych rzeczywistych i przyjmuje następującą postać:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

gdzie:

$y_t$  – rzeczywista wartość zmiennej Y w momencie lub okresie  $t$ ,

$\hat{y}_t$  – teoretyczna wartość zmiennej Y w momencie lub okresie  $t$ ,

$\bar{y}_t$  – średnia wartość zmiennej Y w szeregu czasowym o długości  $n$ .

W standardowych przypadkach współczynnik  $R^2$  przybiera wartości z przedziału  $[0,1]$ , przy czym im wyższa wartość tego wskaźnika tym lepsze dopasowanie modelu.

Teoretyczna wartość prognozowanej zmiennej  $\hat{y}_t$  dla modelu tendencji rozwojowej będzie ustalona na podstawie wybranej funkcji z uwzględnieniem współczynnika  $R^2$ .

W zależności od przyjętych założeń co do wpływu poszczególnych składowych szeregu czasowego na prognozowaną zmienną, wzajemnych relacji tych składowych i występowania wahań sezonowych konstruowany model z wykorzystaniem metody wskaźnikowej może mieć postać addytywną lub multiplikatywną. Gdy amplitudy wahań, tj. różnice między rzeczywistymi wartościami prognozowanej zmiennej, a odpowiadającymi im wartościami teoretycznymi uzyskanymi z modelu tendencji rozwojowej w analogicznych fazach cyklu są w przybliżeniu takie same (wahania bezwzględnie stałe), to wówczas do opisu kształtowania się wartości prognozowanej zmiennej można użyć modelu addytywnego:

$$y_{ti} = \hat{y}_{ti} + c_i + \epsilon_t$$

gdzie:

$y_{ti}$  – rzeczywista wartość prognozowanej zmiennej w okresie  $t$  w  $i$ -tej fazie cyklu,

$\hat{y}_{ti}$  – teoretyczna wartość prognozowanej zmiennej w okresie  $t$  w  $i$ -tej fazie cyklu wyznaczona z modelu trendu (tendencji rozwojowej),

$c_i$  – wskaźnik sezonowości dla  $i$ -tej fazy cyklu,

$\epsilon_t$  – składnik losowy.

$t = 1, \dots, n$ ,

$i = 1, \dots, r$ ,

$r$  – liczba faz cyklu.

W przypadku, gdy wielkości amplitud wahań zmieniają się mniej więcej w tym samym stosunku (wahania względnie stałe), to wówczas do opisu kształtowania się wartości prognozowanego wskaźnika syntetycznego można użyć modelu multiplikatywnego:

$$y_{ti} = \hat{y}_{ti} c_i \epsilon_t$$

Następnie należy dokonać eliminacji tendencji rozwojowej  $z_{ti}$  z szeregu czasowego. W modelu addytywnym dokonuje się tego poprzez ustalenie różnicy wartości rzeczywistych prognozowanej zmiennej i wartości teoretycznych otrzymanych z modelu tendencji rozwojowej:

$$z_{ti} = y_{ti} - \hat{y}_{ti}$$

W modelu multiplikatywnym eliminacji tendencji rozwojowej dokonuje się poprzez obliczenie ilorazu rzeczywistych wartości prognozowanej zmiennej i wartości teoretycznych otrzymanych z modelu tendencji rozwojowej:

$$z_{ti} = \frac{y_{ti}}{\hat{y}_{ti}}$$

Otrzymane  $z_{ti}$  zawierają wahania przypadkowe i sezonowe, zatem aby wyeliminować oddziaływanie składników losowych (wahania przypadkowe) na kształtowanie się wartości prognozowanej wskaźnika syntetycznego należy obliczyć, tzw. surowe wskaźniki sezonowości  $s_i$ :

$$s_i = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z_{i+j \times r, i}$$

gdzie:

$i = 1, 2, \dots, r$

$r$  – liczba faz cyklu

$k$  – liczba jednoimiennych faz w badanym szeregu czasowym.

Zazwyczaj w celu wyznaczenia wskaźników  $s_i$  stosuje się średnią arytmetyczną, rzadziej medianę.

W ostatnim etapie wyznaczane są tzw. czyste wskaźniki sezonowości  $c_i$ , które informują o średnich odchyleniach (bezwzględnych w modelu addytywnym i względnych w modelu multiplikatywnym) wartości prognozowanego wskaźnika od tendencji rozwojowej analizowanego zjawiska w poszczególnych fazach cyklu. Wskaźniki te wyznacza się następująco:

$$c_i = s_i - q \quad (\text{dla modelu addytywnego}),$$

$$c_i = \frac{s_i}{q} \quad (\text{dla modelu multiplikatywnego}),$$

gdzie:

$$q = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r s_i$$

$r$  – liczba faz cyklu.

Czyste wskaźniki sezonowości w modelu addytywnym wyrażone są w tych samych jednostkach co zmienna prognozowana, a ich suma powinna być równa 0. Z kolei w modelu multiplikatywnym są to wielkości niemianowane, a ich suma powinna być równa liczbie faz tworzących cykl.

Ostatecznie prognozowaną wartość wskaźnika na moment lub okres  $t$  można wyznaczyć następująco:

$$y_{ti}^* = y_{ti}^{*(w)} + C_i, \quad t > n \quad (\text{dla modelu addytywnego})$$

$$y_{ti}^* = y_{ti}^{*(w)} C_i, \quad t > n \quad (\text{dla modelu multiplikatywnego})$$

gdzie:

$y_{ti}^*$  – prognoza zmiennej  $Y$  wyznaczona na moment lub okres  $t$ ,

$y_{ti}^{*(w)}$  – wstępna prognoza zmiennej  $Y$  na moment lub okres  $t$ , wyznaczona na podstawie modelu tendencji rozwojowej (modelu trendu),

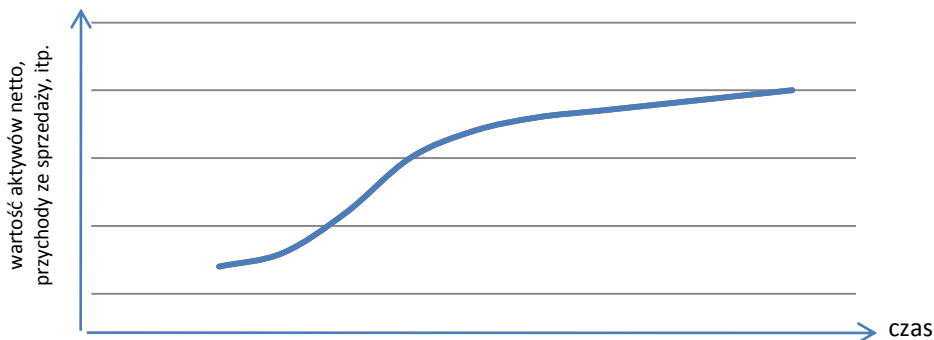
$C_i$  – czysty wskaźnik sezonowości dla  $i$ -tej fazy cyklu.

#### 1.8.4. KONCEPCJA PASM STRATEGICZNYCH

##### Pasma strategiczne w ujęciu ekonomicznym

Klasyczna trajektoria rozwoju przedsiębiorstwa wyznacza trzy typowe fazy tego rozwoju, tj. fazę początkową (powstanie), wzrostu i stabilizacji (rysunek 1.1.).

Rysunek 1.1. Typowy cykl życia przedsiębiorstwa (fazy rozwoju)

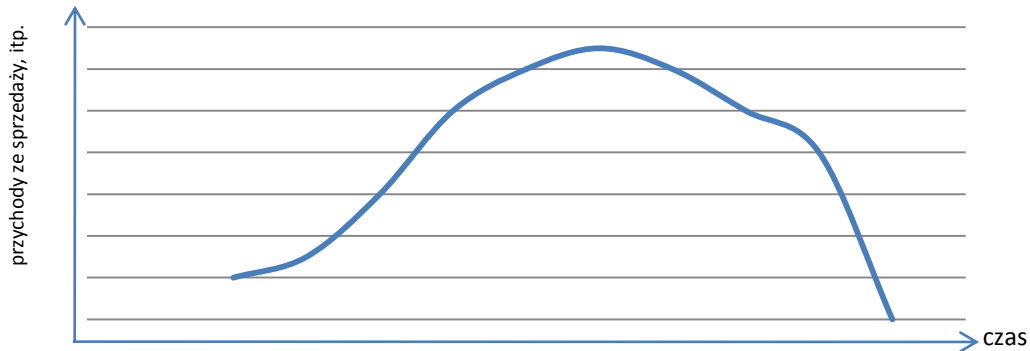


Źródło: opracowanie własne.

Każdy podmiot charakteryzuje się jednak innym cyklem rozwoju, który uzależniony jest od długości funkcjonowania podmiotu na rynku, specyfiki branży czy występującej w niej konkurencji. Wszystko to, łącznie z czynnikami zewnętrznymi (sytuacja gospodarcza kraju czy regionu, stopa bezrobocia, przepisy fiskalne, itd.), kształtuje sprzyjające lub/i niesprzyjające warunki otoczenia. Czynniki te kształtują rozwój przedsiębiorstwa i oczywistym wydaje się, że nie jest możliwy niezakłócony i nieskończony wzrost przedsiębiorstwa. W konsekwencji w cyklu życia przedsiębiorstwa będzie dochodziło do faz załamania i kryzysów. Zdolność przedsiębiorstwa do wychodzenia z kryzysu i utrzymania swojej aktywności gospodarczej

zależy w dużym stopniu od potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa, jednak nie wszystkie podmioty są w stanie przeciwdziałać sytuacjom kryzysowym i po fazie załamania z powrotem wrócić do fazy wzrostu i stabilizacji (rysunek 1.2.).

**Rysunek 1.2. Cykl życia przedsiębiorstwa „bankruta”**



Źródło: opracowanie własne.

Analizując w związku z tym cykl życia przedsiębiorstwa można określić w jakiej fazie rozwoju znajduje się podmiot, a także zidentyfikować na podstawie przyjętych kryteriów sygnały ostrzegawcze wskazujące na występowanie symptomów upadłości. Pasma strategiczne będą więc stanowić wyznaczone przedziały dopuszczalnych odchyłeń od założonej trajektorii rozwoju danego przedsiębiorstwa wskazującej kolejne fazy jego cyklu życia.

Wyznaczenie pasm strategicznych i identyfikacja na ich podstawie sygnałów ostrzegawczych i symptomów bankructwa oznacza w związku z tym konieczność wyznaczenia trajektorii rozwoju przedsiębiorstwa. To z kolei wymaga odpowiedniego doboru kategorii ekonomicznych stanowiących składnik potencjału ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstwa i będących jednocześnie nośnikiem lub miernikiem wartości (np. wartość majątku, przychodów ze sprzedaży, itd.), funkcji służącej do prognozowania przyjętych wielkości, metod analizy zmienności i stabilności zmian oraz kryteriów zgodnie z którymi identyfikowane będą sygnały ostrzegawcze wskazujące na występowanie symptomów upadłości.

Na podstawie analizy pasm strategicznych można będzie nie tylko identyfikować sygnały ostrzegawcze, ale także podjąć odpowiednie działania, dzięki którym danym podmiot może uniknąć kłopotów ekonomicznych i zdoła utrzymać swoją aktywność gospodarczą.

### **Pasma strategiczne w ujęciu statystycznym**

Do modelowania cyklu życia przedsiębiorstwa oraz wyznaczenia pasm strategicznych wykorzystuje się pewnej klasy modele nieliniowe. Wydaje się celowym doprecyzowanie niektórych statystycznych aspektów estymacji modelu cyklu życia przedsiębiorstwa oraz wyznaczania pasm strategicznych.

W pierwszej kolejności wyznacza się **model regresji nieliniowej**. Niech będzie dana jednowymiarowa zmienna objaśniana ( $y$ ), której kształtowanie można opisać za pomocą nieliniowej funkcji czasu ( $t$ ):

$$y_t = f(t, \theta).$$

Do modelowania cyklu życia przedsiębiorstwa wykorzystuje się funkcję log-logistyczną o postaci:

$$f(t, \theta) = \frac{a \ln(t)}{1 + \exp(b - ct)} + w; \theta = (a, b, c, w)$$

Kształt funkcji  $f$  zależy od wektora parametrów  $\theta$ , które są szacowane na podstawie zbioru  $T$  obserwacji:  $(y_1, t_1), \dots, (y_T, t_T)$ . Równanie (1) przedstawia sytuację nierealną, tzn. sytuację w której zmienna objaśniana jest deterministyczną funkcją czasu. W praktyce z wartościami zmiennej  $y$  związany jest błąd losowy. W rezultacie przyjmuje się, że wartość  $y$  składa się z komponentu systematycznego oraz losowego:

$$y_t = f(t, \theta) + \varepsilon_t$$

Standardowymi założeniami czynionymi w zakresie probabilistycznych własności składnika losowego jest przyjęcie, że podlega on rozkładowi normalnemu o zerowej wartości oczekiwanej oraz stałej wariancji  $\sigma^2$ .

Następnie dokonywana jest **estymacja parametrów modelu**. Estymacja modelu (3) polega na wyznaczeniu wektora parametrów  $\theta$ , który minimalizuje stosowną funkcję różnic pomiędzy zaobserwowanymi wartościami  $y_t$  a odpowiadającymi im wartościami  $f(t, \theta)$ . Powszechnie stosowaną miarą odległości pomiędzy rzeczywistymi obserwacjami, a tymi wynikającymi z modelu, jest suma kwadratów różnic:

$$RSS(\theta) = \sum_t (y_t - f(t, \theta))^2$$

Wektor  $\hat{\theta}$ , dla którego  $RSS(\hat{\theta})$  przyjmuje wartość minimalną będzie nosić nazwę oceny wektora  $\theta$  metodą najmniejszych kwadratów. Opierając się na wartości  $S(\hat{\theta})$  można również wyznaczyć ocenę wariancji składnika losowego:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS(\hat{\theta})}{T}$$

W przypadku modeli nieliniowych istotnym zagadnieniem jest metoda wyznaczania ocen parametrów modelu. W porównaniu do klasycznego modelu regresji wielorakiej model (3) nie posiada analitycznego rozwiązania. W rezultacie należy odwołać się do numerycznych metod optymalizacji funkcji celu zdefiniowanej równaniem (4). W tym celu możliwe jest wykorzystanie algorytmów typu Gaussa-Newtona, simplex lub im podobnych. Należy jednak zaznaczyć, że doświadczenia aplikacyjne wskazują na to, że funkcja celu (4) posiada wiele



lokalnych minimów. W rezultacie zaleca się wielokrotne rozpoczynanie poszukiwania minimum z różnych punktów startowych (tzw. technika multistartu).

W zakresie przedziałów predykcji istotną kwestią jest to, aby ich konstrukcja uwzględniała nieliniowy charakter  $f(t, \theta)$ . Niech  $\hat{V}(\hat{\theta})$  będzie oceną asymptotycznej macierzy kowariancji wektora ocen  $\hat{\theta}$ , natomiast niech  $\lambda = f(t, \hat{\theta})$  oznacza prognozę na okres  $t$ . Wówczas ocena błędu standardowego  $\lambda$  ma postać:

$$\hat{S} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\right)^T \hat{V}(\hat{\theta}) \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$$

(gdzie  $\frac{\partial f}{\partial p}$  oznacza pochodną cząstkową funkcji  $f$  względem parametru  $p$ ), a  $(1 - \alpha)\%$  przedział predykcji dla prognozy  $\lambda$  jest dany poprzez:

$$\left(\lambda - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{S}}; \lambda + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{S}}\right)$$

gdzie:

$z_{1-\alpha/2}$  to kwantyl rzędu  $1 - \alpha/2$  standardowego rozkładu normalnego.

W ostatnim etapie wyznaczone zostają **przedziały predykcji** z uwzględnieniem heteroskedastyczności składnika losowego. Biorąc bowiem pod uwagę naturę badanych w części empirycznej szeregów czasowych, zasadne wydaje się rozluźnienie założenia o stałości wariancji składnika losowego w czasie. W praktyce należy się spodziewać, że wraz z rozwojem przedsiębiorstwa (mierzonym np. za pomocą przychodów ze sprzedaży) oscylacje zmiennej zależnej będą pozostawać w relacji do jej poziomu. Pominięcie heteroskedastyczności może negatywnie wpłynąć na budowane przedziały predykcji, np. powodując, że dla małych wartości zmiennej zależnej będą one zbyt szerokie, natomiast dla dużych wartości zmiennej zależnej będą zbyt wąskie. Wyznaczenie możliwie najlepszych przedziałów predykcji jest szczególnie ważne w kontekście metody pasm strategicznych, gdzie przekroczenie przez wartość rzeczywistą granic przedziału predykcji pociąga za sobą istotne konsekwencje.

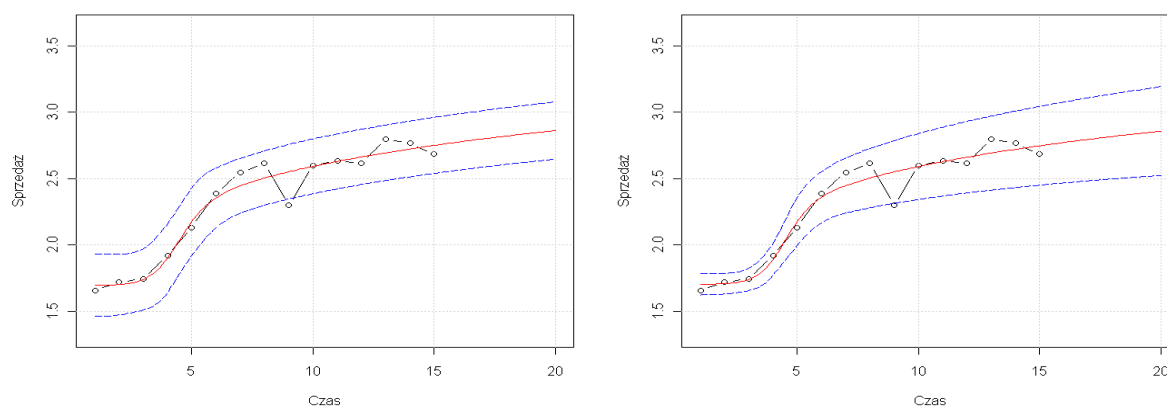
Jednym z możliwych sposobów uwzględnienia heteroskedastyczności składnika losowego jest przyjęcie, że wariancja składnika losowego jest iloczynem stałej oraz pewnej potęgi funkcji  $f(t, \theta)$ , tzn. jest postaci:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 f(t, \theta)^r$$

Wówczas  $(1 - \alpha)\%$  przedział predykcji dla prognozy  $\lambda$  jest dany poprzez:

$$\left(\lambda - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 f(t, \hat{\theta})^r + \hat{S}}; \lambda + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 f(t, \hat{\theta})^r + \hat{S}}\right)$$

**Rysunek 1.3. Porównanie przedziałów predykcji w przypadku założenia homo- oraz heteroskedastyczności składnika losowego**



Źródło: opracowanie własne.

### 1.8.5. KONSTRUKCJA MODELI PREDYKCJI UPADŁOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW

#### Przegląd polskich modeli predykcji upadłości

W tabeli 1.4. zestawiono wielkości zbiorów danych, na podstawie których w warunkach polskich budowane były modele predykcji upadłości przedsiębiorstwa. Cechą wspólną polskich modeli upadłości jest stosowanie bardzo małych „prób uczących”.

**Tabela 1.4. Rozmiary „prób uczących” przyjętych w polskich modelach predykcji**

Autor	Rok	Rozmiar próby
M. Pogodzińska, S. Sojak	1995	10
D. Hadasik	1998	44
D. Wierzbą	2000	48
A. Pogorzelski	2000	48
K. Michaluk	2000	80
A. Hołda	2001	80
S. Sojak, J. Stawicki	2001	58
J. Gajdka, T. Stos	2003	40
M. Gruszczyński	2003	46
J. Janek, M. Żuchowski	2003	50
Hamrol, Czajka, Piechocki	2004	100
D. Wędzki	2004	80
P. Stępień, T. Strąk	2004	36
D. Appenzeller, K. Szarzec	2004	68
B. Prusak	2005	80 + 78
T. Korol	2005	78
E. Mączyńska, M. Zawadzki	2006	80

Źródło: Opracowanie własne na podstawie źródłowych pozycji literaturowych zawartych w wykazie bibliografii.

Wskazane modele niewątpliwie dostarczają pewnej wiedzy o wpływie poszczególnych zmiennych opisujących działalność przedsiębiorstwa, na prawdopodobieństwo jego upadłości. Należy jednak do tych modeli podchodzić z dużą dozą ostrożności, gdyż w tak małych próbach raportowane przez autorów poszczególnych modeli bardzo wysokie zdolności predykcyjne, mogą być znacznie przeszacowane.

Biorąc pod uwagę powyższe, dla celów zastosowania modeli predykcji upadłości na szeroką skalę w ramach komponentu monitorowania Systemu Wczesnego Ostrzegania (SWO) zasadnym wydaje się opracowanie modeli nowych, które będą oparte na znacznie większych oraz bardziej aktualnych zbiorach danych.

### **Metody tworzenia zbioru danych do budowy modeli predykcji upadłości**

W standardowym przypadku tworzenie zbioru danych na potrzeby budowy modelu predykcji sprowadza się do pobrania z populacji próby losowej jednostek statystycznych. Następnie dla każdej jednostki określana jest jej przynależność do jednej z uprzednio zdefiniowanych klas.

W przypadku predykcji upadłości takie podejście jest rzadko spotykane. Częściej stosownym podejściem jest zgromadzenie zbioru danych o przedsiębiorstwach upadłych, a następnie na dobraniu do nich przedsiębiorstw, które nie upadły. W niewielkich zbiorach danych stosuje się zazwyczaj dobieranie przedsiębiorstw upadłych do nieupadłych oparte na wiedzy eksperckiej. Takie podejście nie jest jednak możliwe w sytuacji dużych zbiorów danych.

O ile metody dobierania do jednostek statystycznych posiadających wyróżnioną cechę jednostek nie posiadających takiej cechy są doskonale znane na gruncie nauk medycznych o tyle metody te wydają się być niemal nieznanymi na gruncie przewidywania upadłości. Podstawową metodą „parowania” obiektów jest technika *case-control*, nazywana w polskiej biostatystyce metodą badań kliniczno-kontrolnych. Polega ona na określeniu kilku kluczowych cech jednostek statystycznych oraz dopasowaniu do każdej jednostki posiadającej wyróżnioną cechę jednostki bez takiej cechy, która jest do niej najbardziej podobna ze względu na zmienne służące do parowania. W praktyce najczęściej stosuje się parowanie 1 do 1, lecz z teoretycznego punktu widzenia uzasadnione jest parowanie nawet 1 do 5.

Inną metodą tworzenia zbioru danych jest parowanie typu *frequency matching*. W tej technice nie jest wymagane indywidualne dobieranie przedsiębiorstw nieupadłych do przedsiębiorstw upadłych. Wymagane jest, podobnie jak w metodzie *case-control*, określenie zmiennych parujących (np. wartość aktywów, wielkość zatrudnienia, przychody netto) a następnie takie dobranie przedsiębiorstw nieupadłych, aby rozkłady zmiennych parujących były maksymalnie zbliżone do siebie w obu grupach.

## Analiza jednowymiarowa i poszukiwanie rozkładów teoretycznych

Etap budowy modeli predykcyjnych zostanie poprzedzony analizą jednowymiarowych rozkładów rozważanych zmiennych objaśniających. Rozkłady te będą analizowane zarówno w oparciu o ich charakterystyki opisowe (średnia, decyle, miary rozproszenia) jak również odpowiednie wykresy (histogramy, funkcje gęstości wyznaczone estymatorami jądrowymi). Rozkłady będą osobno generowane dla przedsiębiorstw, które upadły oraz dla tych, które nie upadły. Ponadto w przypadku wystarczająco obszernego zbioru danych rozkłady zmiennych objaśniających będą również wyznaczone w przekroju względem rodzaju działalności gospodarczej.

W kolejnym kroku rozważone zostanie dopasowywanie do empirycznych rozkładów zmiennych, objaśniających rozkładów teoretycznych. Zweryfikowana zostanie jakość dopasowania elementarnych rozkładów dla zmiennych jednowymiarowych, takich jak rozkład normalny, log-normalny, Weibulla, czy gamma. W przypadku stwierdzenia braku dopasowania rozkładów standardowych rozważone zostaną niektóre klasy rozkładów uogólnionych, takich jak uogólniony rozkład lambda, czy uogólniony rozkład beta.

## Naiwny klasyfikator Bayesa

Na bazie opisanych powyżej jednowymiarowych analiz rozkładów zmiennych objaśniających wygenerowanych dla przedsiębiorstw, które upadły oraz dla tych, które nie upadły zostanie zbudowany naiwny klasyfikator Bayesa.

Niech  $i$ -ty obiekt (przedsiębiorstwo) będzie opisany za pomocą  $p$ -wymiarowego wektora zmiennych objaśniających  $x_i$ . Zakłada się, że  $f_k(x_{ik}|bankrut)$  oraz  $f_k(x_{ik}|nie\ bankrut)$  są odpowiednio funkcjami gęstości prawdopodobieństwa dla  $k$ -tej zmiennej objaśniającej w grupie przedsiębiorstw, które zbankrutowały oraz tych, które nie zbankrutowały.

Reguła decyzyjna przypisze  $i$ -te przedsiębiorstwo do grupy bankrutów jeżeli:

$$\prod_{k=1}^p f_k(x_{ik}|bankrut) > \prod_{k=1}^p f_k(x_{ik}|nie\ bankrut)$$

## Model dyskryminacyjny

Liniowa analiza dyskryminacyjna Fishera w swej istocie polega ona na znalezieniu liniowej kombinacji zmiennych objaśniających, które w możliwie najlepszy sposób rozróżniają pomiędzy dwoma (lub więcej) grupami obiektów.

W analizie dyskryminacyjnej zakłada się, że  $i$ -ty obiekt można opisać za pomocą  $p$ -wymiarowego wektora zmiennych objaśniających  $x_i$ . Niech  $\bar{x}_1$  oraz  $\bar{x}_2$  oznaczają wektory

wartości przeciętnych odpowiednio w pierwszej i drugiej grupie obiektów, natomiast niech  $S$  oznacza wspólną dla obu grup macierz kowariancji. Zasadniczym komponentem reguły klasyfikującej (reguły decyzyjnej) jest wektor  $\beta$  dany następującą analityczną formułą:

$$\beta = S^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

Obiekt  $x_i$  zostaje zaklasyfikowany do drugiej grupy jeśli prawdziwa jest następująca nierówność:

$$\beta'(x_i - (\bar{x}_2 + \bar{x}_1)/2) > 0$$

Głównymi zaletami modelu dyskryminacyjnego jest łatwość obliczeń związana z wyznaczaniem modelu. Ponadto w wielu przypadkach dokładność predykcji modelu dyskryminacyjnego jest porównywalna z modelami bardziej zaawansowanymi, szczególnie jest to widoczne dla stosunkowo niewielkich zbiorów danych.

### Model regresji logistycznej

Na potrzeby komponentu monitorowania SWO przeprowadzono pogłębione badania nad modelem regresji logistycznej oraz stworzono specjalistyczne oprogramowanie.

Regresja logistyczna jest jednym z najpopularniejszych narzędzi analizy danych binarnych. Najczęściej służy ona do oceny wpływu zmiennych niezależnych na prawdopodobieństwo wystąpienia pewnego zdarzenia, w tym przypadku upadłości przedsiębiorstwa.

W klasycznym modelu regresji logistycznej zakłada się, że zmienna zależna  $y_i \in \{0,1\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) podlega rozkładowi Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $F(x_i'\theta)$ , gdzie  $F(\cdot)$  jest dystrybuantą rozkładu logistycznego,  $x_i$  to  $p$ -wymiarowy wektor zmiennych objaśniających, a  $\theta \in \mathbb{R}^p$  to (zawierający wyraz wolny)  $p$ -wymiarowy wektor parametrów strukturalnych.

W celu estymacji wektora parametrów  $\theta$  można zastosować metodę największej wiarygodności, która polega na maksymalizacji funkcji wiarygodności względem wektora parametrów strukturalnych  $\theta \in \mathbb{R}^p$ :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n F(x_i'\theta)^{y_i} [1 - F(x_i'\theta)]^{1-y_i}$$

Najczęściej w praktyce proces poszukiwania ocen parametrów rozpoczyna się od wyznaczenia logarytmu funkcji wiarygodności:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n y_i \ln F(x_i'\theta) + (1 - y_i) \ln [1 - F(x_i'\theta)]$$

oraz jego pochodnych cząstkowych względem parametrów modelu:

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i'\theta))x_i$$

Błąd średni szacunku  $j$ -tej ( $j = 1, \dots, p$ ) oceny parametru można wyznaczyć obliczając pierwiastek kwadratowy z elementu leżącego w  $j$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie odwrotnej macierzy informacyjnej:

$$I_{\theta}^{-1} = \left( - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 l_i(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right)^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^n F(x_i'\theta)(1 - F(x_i'\theta)) x_i x_i' \right]^{-1}$$

Wówczas  $(1 - \alpha)\%$  przedział ufności Walda dla  $\theta_j$  ma postać:

$$\left( \hat{\theta}_j - z_{1-\alpha/2} \sqrt{I_{\hat{\theta}}^{-1}{}_{jj}}; \hat{\theta}_j + z_{1-\alpha/2} \sqrt{I_{\hat{\theta}}^{-1}{}_{jj}} \right)$$

gdzie:

$z_{1-\alpha/2}$  to kwantyl rzędu  $1 - \alpha/2$  standardowego rozkładu normalnego.

Wyniki badań wskazały, że oceny parametrów modelu regresji logistycznej uzyskane metodą największej wiarygodności (MNW) charakteryzują się istotnym obciążeniem. Ponadto w przypadku wystąpienia zjawiska całkowitego rozdzielenia (*complete separation*) metoda największej wiarygodności nie prowadzi do uzyskania skończonych ocen parametrów. Całkowite rozdzielenie ma miejsce, gdy sukcesy i porażki mogą być całkowicie rozdzielone za pomocą jednej zmiennej objaśniającej lub liniowej kombinacji kilku zmiennych objaśniających. Standardowym postępowaniem w przypadku napotkania całkowitego rozdzielenia jest usunięcie z modelu zmiennej lub zmiennych powodujących problem. Jednak z merytorycznego punktu widzenia działanie polegające na usuwaniu zmiennych, które najlepiej opisują stan zmiennej zależnej, wydaje się nielogiczne. W związku z tym i na potrzeby SWO porównano dwie metody estymacji parametrów modelu regresji logistycznej, które eliminują problem całkowitego rozdzielenia oraz dostarczają ocen parametrów o mniejszym w porównaniu do MNW obciążeniu.

### **Model regresji logistycznej z ukrytą zmienną objaśnianą (*Hidden Logistic Model*)**

W modelu HLM zakłada się istnienie pewnego dodatkowego mechanizmu stochastycznego, który powoduje, że prawdziwe wartości zmiennej zależnej nie są obserwowalne, zmienna zależna jest zmienną ukrytą (*latent variable*). Innymi słowy może się zdarzyć, że dany przypadek jest sukcesem (porażką), lecz z powodu obecności wspomnianego mechanizmu stochastycznego przypadek zostanie uznany za porażkę (sukces).

Niech  $s$  oznacza sukces,  $f$  porażkę, a  $T$  niech będzie zmienną losową oznaczającą rzeczywisty i zarazem nieznaną (ukrytą) stan  $i$ -tego przypadku. Obserwowalną i silnie związaną z  $T$  zmienną losową jest  $Y$ . Wówczas, gdy  $T = s$  to  $Y = 1$  z prawdopodobieństwem  $\delta_1$ , a błędna klasyfikacja  $i$ -tego przypadku występuje z prawdopodobieństwem  $1 - \delta_1$ . Podobnie, gdy  $T = f$  to  $Y = 1$  z prawdopodobieństwem  $\delta_0$ , a  $Y = 0$  z prawdopodobieństwem  $1 - \delta_0$ .

Zasadniczą kwestią jest określenie metody estymacji parametrów tak zdefiniowanego modelu. Okazuje się, że praktyczna realizacja estymacji nie następuje z trudnością. Kluczowym elementem jest stworzenie tzw. pseudoobserwacji  $\tilde{y}_i$  dla każdej z oryginalnych obserwacji według następującej formuły:

$$\tilde{y}_i = (1 - y_i)\delta_0 + y_i\delta_1$$

Precyzyjne wartości  $\delta_0$  oraz  $\delta_1$  mogą być poznane jedynie dla bardzo dużych zbiorów danych, w praktyce można przyjąć, że  $\delta_0 = 0,01$ ,  $\delta_1 = 0,99$ . Alternatywnie można tak dobrać wartości  $\delta_0$  oraz  $\delta_1$ , aby suma pseudoobserwacji była równa sumie oryginalnych wartości zmiennej objaśnianej.

Następnie do tak utworzonych pseudoobserwacji można zastosować klasyczną metodę największej wiarygodności, której celem jest maksymalizacja funkcji wiarygodności względem wektora parametrów strukturalnych  $\theta \in \mathbb{R}^p$ :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n F(x_i'\theta)^{\tilde{y}_i} [1 - F(x_i'\theta)]^{1-\tilde{y}_i}$$

### Model regresji logistycznej Firtha

W przypadku modelu regresji logistycznej Firtha funkcję  $s(\theta)$  zastępuje się pewną jej modyfikacją:

$$s^*(\theta) = \sum_{i=1}^n \left( y_i - F(x_i'\theta) + h_i \left( \frac{1}{2} - F(x_i'\theta) \right) \right) x_i$$

gdzie:

$h_i$  – to diagonalne elementy macierzy  $H = W^{\frac{1}{2}} X (X' W X)^{-1} X' W^{\frac{1}{2}}$ ,

$X$  – to macierz danych,

$W$  – jest macierzą diagonalną o wymiarach  $n \times n$ , której  $i$ -ty diagonalny element jest równy  $F(x_i'\theta)(1 - F(x_i'\theta))$ .

Modyfikacja układu równań  $s(\theta)$  jest tożsama z modyfikacją funkcji wiarygodności w następujący sposób:

$$L^*(\theta) = L(\theta) |I_\theta|^{1/2},$$

gdzie:

$I_\theta$  – to macierz informacyjna,

$L^*(\theta)$  – bywa nazywana funkcją wiarygodności z karą (penalized likelihood function).

Opisane powyżej podejście w znaczący sposób redukuje obciążenie ocen parametrów modelu. Interesującym faktem jest to, że powyższa modyfikacja oryginalnej funkcji wiarygodności posiada interpretację z bayesowskiego punktu widzenia. Jest to bowiem klasyczny model regresji logistycznej z nałożonym na parametry nieinformacyjnym rozkładem a priori Jeffreysa.

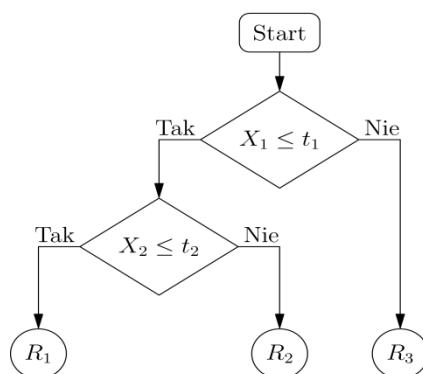
### Model drzew klasyfikacyjnych oraz lasów losowych

Podstawowym elementem budującym algorytm lasów losowych jest drzewo decyzyjne. Tym samym zasadne wydaje się rozpoczęcie opisu metody lasów losowych od tej właśnie techniki.

Niech zbiór danych (próba ucząca) składa się z  $n$  obserwacji na  $p$  zmiennych objaśniających oraz zmiennej definiującej przynależność obiektu do jednej z klas. Algorytm drzew decyzyjnych w pierwszym kroku określa regułę podziału zbioru  $n$  obserwacji na dwa niekoniecznie równoliczne podzbiory. Dla ciągłych (ilościowych) zmiennych objaśniających oznacza to wybranie tej z  $p$  zmiennych (wraz z odpowiednim punktem odcięcia), która prowadzi do podziału (w pewnym sensie) najlepszego, np. podziału minimalizującego błąd klasyfikacji. W następnym kroku rozumowanie przedstawione powyżej jest powtarzane w wygenerowanych podzbiórach, aż do spełnienia warunku zatrzymania procedury.

Omówiony pokrótce mechanizm działania metody został zilustrowany na rysunku 1.4. Można zauważyć, że próba ucząca została podzielona na trzy rozłączne podzbiory (obszary) oznaczone  $R_1$ ,  $R_2$  oraz  $R_3$ . Na drzewo decyzyjne składają się dwie reguły decyzyjne oparte na zmiennych  $X_1$  oraz  $X_2$ . Pierwsza reguła decyzyjna bada czy wartość zmiennej  $X_1$  jest mniejsza lub równa od pewnej stałej  $t_1$ . W przypadku, gdy warunek nie jest spełniony należy podążać w prawo. Ta reguła decyzyjna definiuje obszar  $R_3$  (znajdują się tam wszystkie obserwacje spełniające regułę decyzyjną). Każdej obserwacji w obszarze  $R_3$  zostanie przypisana klasa, która dominuje w obszarze  $R_3$ . Analogicznej interpretacji można dokonać dla obszarów  $R_1$  oraz  $R_2$ .

Rysunek 1.4. Przykładowe drzewo decyzyjne



Źródło: Opracowanie własne.



Drzewa decyzyjne w podstawowej formie charakteryzują się szeregiem zalet, ale również istotnymi wadami. Do najważniejszych zalet należy łatwość interpretacji drzewa decyzyjnego oraz możliwość graficznej prezentacji zasady jego działania. Inną zaletą drzew decyzyjnych jest to, że radzą sobie one z problemem braków danych poprzez tworzenie dla każdej reguły podziału reguły zastępczej (drugi w kolejności najlepszy podział), która jest stosowana w miejsce reguły najlepszej w przypadku napotkania wspomnianego braku danych. Mechanizm ten można uogólnić tworząc kilka podziałów zastępczych.

Zasadniczą wadą drzew decyzyjnych jest ich duża niestabilność. Oznacza to, że nawet stosunkowo niewielka zmiana zbioru uczącego, np. polegająca na dodaniu lub usunięciu kilku obserwacji, może prowadzić w konsekwencji do całkowicie innej sekwencji podziałów. W świetle tej obserwacji zaprezentowana powyżej zaleta, w postaci łatwej interpretacji, może zostać poddana w wątpliwość.

Algorytm lasów losowych jest techniką rozwiązującą zaprezentowany wcześniej problem niestabilności. Ogólna idea lasów losowych polega na stworzeniu wielu różnych drzew decyzyjnych, a każde drzewo jest tworzone na losowej próbie  $n$  obserwacji pobieranych ze zwracaniem ze zbioru uczącego (próba bootstrapowa). Drugi element losowości polega na tym, że w przeciwieństwie do drzew decyzyjnych, gdzie każdy kolejny podział jest wyłaniany na podstawie wszystkich zmiennych objaśniających, w algorytmie lasów losowych najlepszy podział jest określany w oparciu o próbę losową zmiennych. Predykcja na podstawie modelu lasu losowego polega na określeniu predykcji dla każdego drzewa wchodzącego w skład lasu oraz wyznaczeniu predykcji najczęstszej.

Najważniejszymi zaletami lasów losowych jest ich empirycznie wykazana efektywność oraz mała liczba parametrów sterujących ich działaniem. Jest to istotna zaleta w porównaniu do sieci neuronowych, czy metody wektorów nośnych, gdzie liczba parametrów (a tym samym liczba możliwych wariantów ich ustawień) jest duża. Optymalne wartości opisanych powyżej parametrów metody lasów losowych mogą być określone na zbiorze uczącym z wykorzystaniem techniki sprawdzianów krzyżowych.

Kolejną zaletą lasów losowych jest możliwość ich implementacji na procesorach wielordzeniowych (fakt ten został empirycznie zweryfikowany przez autorów opracowania), co drastycznie skraca czas związany z wyznaczaniem modelu.

Zdolności predykcyjne badanych modeli są niewątpliwie najważniejszym czynnikiem decydującym o ich późniejszym zastosowaniu w praktyce. Często jednak w rzeczywistości gospodarczej zdarza się, że odbiorca modelu żąda opisanie sposobu w jaki poszczególne zmienne uwzględnione w modelu wpływają na kształtowanie się zmiennej przewidywanej. W przypadku prostych modeli dyskryminacyjnych czy też modeli logistycznych względnie łatwo można określić kierunek i siłę oddziaływania poszczególnych zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą. Diametralnie inna sytuacja występuje w przypadku modeli zaawansowanych (sieci neuronowe), gdzie uwzględnia się nieliniowe wpływy zmiennych

objaśniających oraz złożone interakcje pomiędzy zmiennymi. W tym kontekście ceną dostępną w przypadku lasów losowych, tzw. wykresów ważności zmiennych. Wykres ten określa moc wyjaśniającą poszczególnych zmiennych, którą w uproszczeniu można rozumieć jako stopień przyrostu błędu predykcji, gdyby daną zmienną wyłączyć z modelu.

### Określanie sprawności modeli predykcji upadłości

Ocena skuteczności metod przewidywania upadłości dokonana będzie za pomocą typowych miar stosowanych w systemach rozpoznawania obiektów, czy też w systemach diagnostycznych. Istotę tych miar najlepiej ukazuje tabela 6 oraz kategorie:

- **czułość** – to prawdopodobieństwo wykrycia bankruta):  $A/(A+B)$ ,
- **specyficzność** – to prawdopodobieństwo uznania „nie bankruta” za „nie bankruta”):  $D/(C+D)$ ,
- **dodatnia zdolność predykcyjna** – to prawdopodobieństwo, że przedsiębiorstwo uznane przez metodę za bankruta naprawdę zbankrutuje):  $A/(A+C)$ ,
- **ujemna zdolność predykcyjna** – to prawdopodobieństwo, że przedsiębiorstwo uznane przez metodę za „nie bankruta” nie zbankrutuje):  $D/(B+D)$ ,
- **sprawność ogólna metody** – to  $(A+D)/(A+B+C+D)$ .

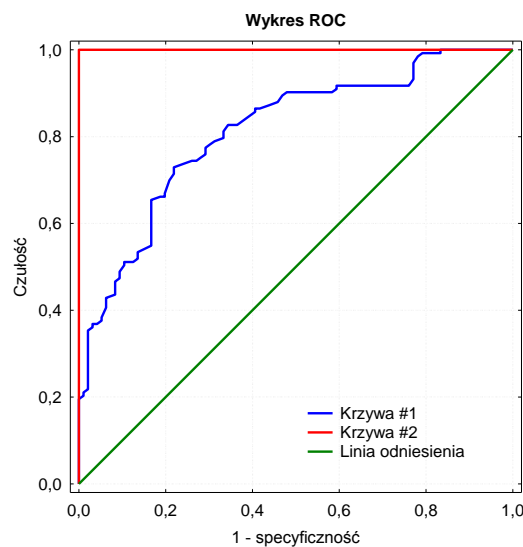
**Tabela 1.5. Typowe miary stosowane w systemach rozpoznawania obiektów**

		Wskazanie metody		
		Bankrut	Nie bankrut	
Stan faktyczny	Bankrut	A	B	A+B
	Nie bankrut	C	D	C+D
		A+C	B+D	

Źródło: Opracowanie własne.

Porównanie różnych klasyfikatorów, porównanie zdolności predykcyjnej wskaźników ekonomiczno-finansowych oraz poszukiwanie tzw. optymalnych punktów odcięcia, umożliwia krzywa ROC. Krzywa ROC (*Receiver Operating Characteristic*) to dwuwymiarowy wykres, który na osi rzędnych prezentuje *czułość*, a na osi odciętych prezentuje *1 – specyficzność*, obliczone dla różnych wartości punktu odcięcia. Na rysunku poniżej druga krzywa 2 pokazuje charakterystykę idealnego klasyfikatora, natomiast linia odniesienia to klasyfikator najgorszy.

Rysunek 1.5. Krzywa ROC



Źródło: Opracowanie własne.

Jedną z najczęściej używanych miar jakości klasyfikatora związaną z krzywą ROC jest pole powierzchni pod tą krzywą – jest ono oznaczane zazwyczaj jako AUC (*Area Under Curve*). Formalna definicja jest następująca:

$$AUC = \int_0^1 y(x) dx$$

gdzie:

$y(x)$  – funkcja opisująca krzywą ROC.

Miara AUC przyjmuje wartości z zakresu  $[0,1]$ , przy czym im większa wartość tym lepsza jest oceniana reguła decyzyjna. Należy przy tym zauważyć, iż model całkowicie losowy jest reprezentowany przez prostą przebiegającą przez punkty  $(0,0)$  i  $(1,1)$ , a co za tym idzie pole pod jego wykresem jest równe  $0,5$ . Wobec tego budowa klasyfikatora, dla którego AUC jest mniejsze niż  $0,5$  nie ma praktycznego sensu. Gdy porównywane są dwa klasyfikatory, to jeśli krzywa ROC odnosząca się do pierwszego z nich znajduje się powyżej każdego punktu drugiej krzywej ROC, to wartość AUC dla pierwszego klasyfikatora musi być większa, niż wartość AUC dla drugiego. Podana zależność nie działa w odwrotny sposób, ponieważ istnieje możliwość przecięcia się dwóch krzywych ROC.

W praktyce przyjmuje się następujący sposób interpretowania wartości AUC dla ocenianych modeli:

- $AUC = 1$  – model doskonały,
- $0,9 \leq AUC < 1$  – model bardzo dobry,
- $0,8 \leq AUC < 0,9$  – model dobry,
- $0,7 \leq AUC < 0,8$  – model słaby,
- $AUC = 0,5$  – model losowy,
- $AUC < 0,5$  – model nieprawidłowy.

### Wielowymiarowe modele szeregów czasowych dla zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością

W przypadku zaistnienia określonej potrzeby oraz wystąpienia warunków zastosowania, w pierwszym etapie zostaną rozważone do wykorzystania wielowymiarowe modele szeregów czasowych, w szczególności modele klasy VAR (*Vector Autoregression*). W przypadku stwierdzenia istnienia relacji kointegrujących pomiędzy badanymi zmiennymi, rozważone zostanie wykorzystanie modeli klasy VECM (*Vector Error Correction*).

Szczegółowy opis tych modeli jest zawarty w rozdziale 2.3 dotyczącym komponentu makroekonomicznego.

### Budowanie prognoz dla zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością

Jednym z zasadniczych celów budowy modeli prognostycznych jest generowanie na ich podstawie prognoz badanych zmiennych. Zakładając, że ostatni rozważny okres ma numer  $T$  prognoza punktowa na okres  $T + h$  wynikająca z oszacowanego modelu VAR jest postaci:

$$y_{T+h|T} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 y_{T+h-1|T} + \dots + \hat{A}_p y_{T+h-p|T}$$

Pomocniczo, w celu dostarczenia pełniejszego obrazu niepewności związanej z prognozami punktowymi tworzone będą prognozy przedziałowe, które w nieformalnym ujęciu określają prawdopodobny zakres dla wartości prognozowanej zmiennej. Podstawową metodą prognozowania przedziałowego będzie podejście klasyczne oparte na założeniu normalności. W tym przypadku  $(1 - \alpha)\%$  przedział predykcji ma postać:

$$\left( y_{k,T+h|T} - z_{1-\alpha/2} s_k; y_{k,T+h|T} + z_{1-\alpha/2} s_k \right)$$

gdzie:

$z_{1-\alpha/2}$  – to kwantyl rzędu  $1 - \alpha/2$  standardowego rozkładu normalnego,

$s_k$  – błąd średni szacunku wartości prognozowanej (dla  $k$ -tego elementu wektora  $y$ ).

Poza klasycznym podejściem do konstruowania prognoz przedziałowych rozważone również zostanie podejście oparte na symulacyjnych metodach generowania prognoz przedziałowych, np. za pomocą techniki bootstrap. Symulacyjnie określone prognozy przedziałowe charakteryzują się lepszymi właściwościami probabilistycznymi w porównaniu do podejścia standardowego, tzn. znacznie częściej osiągają nominalny poziom pokrycia. Wadą podejścia symulacyjnego jest niewątpliwie znaczący czas obliczeń związany z wyznaczaniem prognoz przedziałowych.

## Określanie wpływu zmiennych objaśniających na generowane prognozy

Wielowymiarowe modele szeregów czasowych nie tylko pozwalają na generowanie prognoz lecz również umożliwiają wykrywanie i prezentowanie dynamicznych relacji zachodzących pomiędzy zmiennymi tworzącymi model. Podstawowym narzędziem realizującym zdefiniowane powyżej zagadnienie jest funkcja odpowiedzi na impuls (IRF – *Impulse Response Function*). IRF określa reakcję poszczególnych zmiennych tworzących model wielowymiarowy w kolejnych okresach na wystąpienie jednostkowego zaburzenia (szoku, impulsu, innowacji) działającego na zmienne włączone do modelu.

Kolejnym narzędziem badania wpływu poszczególnych zmiennych na pozostałe zmienne występujące w modelu będzie testowanie przyczynowania w sensie Grangera. Wspomnianą koncepcję można przedstawić za pomocą następującego przykładu. Niech będzie dany model dwuwymiarowy dla szeregów czasowych  $y_{1t}$  oraz  $y_{2t}$ . Zmienna  $y_{2t}$  jest zmienną przyczynującą w sensie Grangera zmienną  $y_{1t}$  jeśli jej obecność w modelu poprawia prognozy zmiennej  $y_{1t}$ .

## Jednowymiarowe modele szeregów czasowych dla zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością

W przypadku, gdyby niemożliwe okazało się zastosowanie modeli wielowymiarowych rozważone zostaną modele jednowymiarowe. Potencjalnymi przesłankami przemawiającymi za wyborem modeli jednowymiarowych mogą być:

- dostępność zbyt krótkich szeregów czasowych,
- nadmierna liczba braków danych,
- brak związku pomiędzy zmiennymi rozważanymi w ramach modeli wielowymiarowych,
- generowanie przez modele wielowymiarowe prognoz obarczonych większymi błędami w stosunku do modeli jednowymiarowych.

### Modele klasy SARIMA

Główny nacisk zostanie położony na przeprowadzenie badań nad możliwością zastosowania modeli klasy ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) do prognozowania zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością.

Proces stochastyczny  $y_t$  jest nazywany procesem ARIMA(p,d,q) jeśli d-krotne różnicowanie sprowadza proces  $y_t$  do postaci ARMA(p,q), która jest dana następującą formułą:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + m_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + m_q \varepsilon_{t-q}$$

gdzie:

$\varepsilon_t$  – jest białym szumem o zerowej wartości oczekiwanej i niezmienniczej względem czasu wariancji,

$\alpha_i$  – są parametrami stojącymi przy komponentcie autoregresyjnym procesu ARMA,

$m_j$  – są parametrami stojącymi przy komponentcie średniej ruchomej.

Jeśli dane będą wykazywać się sezonowością rozważone będzie zastosowanie modeli klasy SARIMA (*Seasonal ARIMA*).

Ustalenie pełnej specyfikacji modelu (S)ARIMA jest koncepcyjnie bardzo zbliżone do procesu ustalania specyfikacji modelu VAR, dlatego też odpowiednie etapy postępowania badawczego nie będą w tym miejscu ponownie przywoływane.

### **Modele klasy ETS (*Exponential Smoothing*)**

Wygładzanie wykładnicze jest pewną klasą metod prognozowania. Przez termin „metoda prognozowania” należy rozumieć zestaw procedur służących do uzyskania prognozy punktowej badanego zjawiska na przyszły okres. Dla kontrastu model klasy ARIMA jest pełnym modelem statystycznym, tzn. określony został w nim proces stochastyczny generujący dane, a zatem oszacowany może być rozkład prawdopodobieństwa dla prognozy na przyszły okres. W rezultacie model statystyczny oprócz prognoz punktowych jest w stanie dostarczać również prognoz przedziałowych o interpretacji probabilistycznej.

Metody wygładzania wykładniczego są szeroko stosowane. Słabą stroną metod wygładzania wykładniczego był brak formalnego osadzenia metod na gruncie probabilistyki, co uległo jednak zmianie. Niewątpliwą zaletą modeli ETS jest dostępność opracowań opisujących konstrukcję przedziałów predykcji nie tylko opartych na założeniu normalności, lecz również bazujących na metodach symulacyjnych.

W celu wyspecyfikowania modelu wygładzania wykładniczego należy określić jego trzy elementy.

Pierwszym elementem jest komponent odpowiedzialny za trend. Komponent ten składa się ze „współczynnika poziomu” oraz „współczynnika wzrostu”. Współczynnik poziomu oraz wzrostu mogą być łączone na kilka sposobów i w rezultacie określać proces, który trendu nie ma lub posiada jeden z następujących rodzajów trendu:

- trend addytywny,
- tłumiony trend addytywny,
- trend multiplikatywny,
- tłumiony trend multiplikatywny.

Drugim elementem jest komponent wahań sezonowych, który może występować w wersji addytywnej, multiplikatywnej lub może nie występować.

Trzecim elementem jest komponent wahań przypadkowych, który może występować w wersji addytywnej lub multiplikatywnej.

Tak określone składowe modelu ETS definiują 30 różnych modeli. W rezultacie możliwe jest przeprowadzenie następującego automatycznego sposobu prognozowania szeregów czasowych:

- dla każdego rozważanego szeregu czasowego należy oszacować każdy z 30 możliwych modeli klasy ETS,
- wybrać ten model, dla którego kryterium informacyjne AIC przyjmuje wartość optymalną, alternatywnie wybór modelu najlepszego można oprzeć na kryterium BIC lub na kryterium minimalizacji błędów prognoz,
- wygenerować prognozy punktowe oraz prognozy przedziałowe na podstawie modelu najlepszego.

## 1.9. LITERATURA

1. Altman E.I., *Revisiting credit scoring models in Basel 2 environment*, Nowy York 2002.
2. Altman E.I., *The Use of Credit Scoring Models and the Importance of a Credit Culture*, 2003, [<http://pages.stern.nyu.edu/~ealtman/3-%20CopCrScoringModels.pdf>].
3. *Analiza ekonomiczna przedsiębiorstwa*, praca zbior. pod red. L. Bednarskiego, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2006
4. *Analiza ekonomiczna w przedsiębiorstwie*, praca zbior. pod red. M. Jerzemowskiej, PWE, Warszawa 2004.
5. *Analiza finansowa w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, praca zbior. pod red. M. Walczaka, Difin, Warszawa 2003.
6. Antonowicz A., *Metody oceny i prognoza kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw*, ODiDK, Gdańsk 2007.
7. Antonowicz P., *Wielowymiarowa analiza koncentracji procesów upadłościowych przedsiębiorstw w podziale administracyjnym Polski*, w: Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 572 – „Ekonomiczne Problemy Usług” nr 44, pt. „Nowoczesne przedsiębiorstwo – tom 1”,
8. Antonowicz P., *Teoria i praktyczne aspekty wykorzystania analizy dyskryminacyjnej w prognozowaniu niewypłacalności (upadłości) przedsiębiorstw*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego „Ekonomiczne Problemy Usług”, Zeszyt 585, nr 50/2010, Wyd. Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2010.
9. Antonowicz P., *Kryzys gospodarczy „2007-2009” w Polsce – medialne doniesienia, czy obiektywna rzeczywistość – retrospektywna analiza zmian w dynamice i strukturze upadłości przedsiębiorstw w Polsce w okresie 2007-2009*, w pracy zbior. pod red. J.L. Bednarczyka: „Finansowe determinanty wzrostu w gospodarce globalnej”, Wyd. CeDeWu, Warszawa 2010,
10. Bartosik Z., Forlicz S., *„Efekt strukturalny” i jego wpływ na proces gospodarczy*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 588, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław 1991.
11. Bednarski L., *Analiza finansowa przedsiębiorstwa*, PWE, Warszawa 2001.
12. Brigham E.F., *Podstawy zarządzania finansami*, PWE, Warszawa 1997.
13. Chołaj H., *Transformacja systemowa w Polsce, Szkice teoretyczne*, UMCS, Lublin 1998.
14. Chomątowski S., Sokołowski A., *Taksonomia struktur*, Przegląd Statystyczny, 1978, z. 2.
15. Chomątowski S., *Dilemmas of the Polish enterprises development under their restructuring*, [w:] Restructuring of the national economy under the systemic transformation, TNOIK AE w Krakowie CECIOS, Kraków 1999.
16. Chomątowski S., Kukuła K., *Metody oceny podobieństwa oraz zmian struktury gospodarczej (na przykładzie województw Polski w latach 1963-1973)*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie, Kraków 1980, nr 127 i inne.
17. *Cykle życia i bankructwa przedsiębiorstw*, praca zbior. pod red. E. Mączyńskiej, Wydawnictwo SGH, Warszawa 2010.
18. Czubakowska K., Gabrusewicz W., Nowak E., *Przychody. Koszty. Wynik finansowy przedsiębiorstwa*, PWE, Warszawa 2009.
19. Duraj J., *Analiza ekonomiczna przedsiębiorstwa*, PWE, Warszawa 1993.
20. *Ekonomiczne i prawne aspekty upadłości przedsiębiorstw*, praca zbior. pod red. B. Prusaka, Difin, Warszawa 2007.



21. Fausett L.V., *Fundamentals of neural networks: architectures, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, 1994.
22. Firth D., *Bias reduction of maximum likelihood estimates*, "Biometrika", Nr 80/1993.
23. Fisher R.A., *The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems*, „Annals of Eugenics”, vol. 7, t II, University College London 1936.
24. Gabrusiewicz W., *Podstawy analizy finansowej*, Wydawnictwo Naukowe PWE, Warszawa 2002.
25. Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A., *Metody taksonomii numerycznej w modelowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1989.
26. Greene W.H., *Econometric analysis*, Prentice Hall, 2003.
27. Hair J.F., *Multivariate data analysis*, Pearson Prentice Hall, 2006.
28. Hamrol M., Czajka B., Piechocki M., *Upadłość przedsiębiorstwa – model analizy dyskryminacyjnej*, „Przegląd Organizacji”, Nr 6/2004.
29. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.H., *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*, Springer, 2009.
30. Heinze G., *A comparative investigation of methods for logistic regression with separated or nearly separated data*, "Statistics in Medicine", Nr 25/2006.
31. Helfert E.A., *Techniki analizy finansowej*, PWE, Warszawa 2003.
32. Hołda A., *Zasada kontynuacji działalności i prognozowanie upadłości w polskich realiach gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2006.
33. Hyndman R.J., *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*, Springer, 2008.
34. Jolliffe I.T., *Principal component analysis*, Springer, 2002.
35. Karpiński A., *Polityka zmian strukturalnych w gospodarce – jej cele i narzędzia*, Gospodarka Planowa, 1974, nr 2.
36. Karpiński A., *Restrukturyzacja gospodarki w Polsce i na świecie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1986.
37. Karpiński A., Paradysz S., Ziemiecki J., *Zmiany struktury gospodarki w Polsce do roku 2010. Polska na tle Unii Europejskiej*, Dom Wydawniczy Elipsa, Warszawa 1999.
38. Karpuś P., *Zmiany strukturalne a rozwój gospodarczy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1978.
39. Kaziniec J., *O metodach swobodnej ocienki strukturalnych sdrwigow*, Wiestnik Statistiki, 1980, nr 11.
40. Kukom K., Regan D., *Measuring entrepreneurship*, Economic Roundup Summer, The Australian Treasury, 2008.
41. Kukuła K., *Pomiar dynamiki struktur ekonomicznych*, Problemy Ekonomiczne, 1975, nr 4.
42. Kukuła K., *Propozycje w zakresie pewnych miar dynamiki struktury*, Przegląd Statystyczny, 1975, nr 3.
43. Kukuła K., *Statystyczne metody analizy struktur ekonomicznych*, Wydawnictwo Edukacyjne, Kraków 1996.
44. Lipowski A., *Przemiany strukturalne*, Instytut Nauk Ekonomicznych PAN, Warszawa 1994.
45. Long Scott J., *Regression models for categorical and limited dependent variables*, SAGE, 1997.
46. Łuczak M., *Ryzyko i kryzys w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Warszawie, Warszawa 2003.
47. Lütkepohl H., Kräzig M., *Applied time series econometrics*, Cambridge University Press, 2004.
48. Lütkepohl H., *New introduction to multiple time series analysis*, Springer, 2005.
49. Łukaszewicz A., Karpiński A., *Struktura gospodarcza. Modyfikacje i nowe zjawiska*, Ekonomista, Warszawa 2001, nr 4.

50. Mączyńska E., Zawadzki M., *Dyskryminacyjne modele predykcji bankructwa przedsiębiorstw*, „*Ekonomista*”, Nr 2/2006.
51. *Małe i średnie przedsiębiorstwa. Szanse i zagrożenia rozwoju*, praca zbior. pod red. N. Daszkiewicz, CeDeWu, Warszawa 2006.
52. Matuszyk A., *Credit scoring, metoda zarządzania ryzykiem kredytowym*, Wydawnictwo CEDEWU, Warszawa 2004.
53. *Metody statystyczne w analizie działalności przedsiębiorstwa*, praca zbior. pod red. E. Nowaka, PWE, Warszawa 2001.
54. Petris G., Petrone S., Campagnoli P., *Dynamic Linear Models with R*, Springer, 2009.
55. Pfaff B., *Analysis of integrated and cointegrated time series with R*, Springer, 2008.
56. Pinheiro J.C., Bates D.M., *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*, Springer, 2009.
57. Pocięcha J., Podolec B., Sokołowski A., Zając K., *Metody taksonomiczne w badaniach społeczno-ekonomicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1988.
58. *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, praca zbior. pod red. M. Cieślaka, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
59. Prusak B., *Nowoczesne metody prognozowania zagrożenia finansowego przedsiębiorstw*, Difin, Warszawa 2005.
60. Rencher A.C., *Methods of multivariate analysis*, John Wiley and Sons, 2002.
61. Rousseeuw P.J., Christmann A., *Robustness against separation and outliers in logistic regression*, „*Computational Statistics & Data Analysis*”, Nr 43/2003.
62. Rutkowska J., *Ocena przydatności metod prognozowania bankructwa w warunkach polskich*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2006.
63. Schwartz A., *Normative Theory of Business Bankruptcy*, Paper 32, Yale University, [<http://law.bepress.com/alea/14th/art32>], 2004.
64. Siedlecki R., *Finansowe sygnały ostrzegawcze w cyklu życia przedsiębiorstwa*, C.H. Beck, Warszawa 2007.
65. Sierpińska M., Jachna T., *Ocena przedsiębiorstwa według standardów światowych*, Wyd. III, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
66. Sierpińska M., Wędzki W., *Zarządzanie płynnością finansową w przedsiębiorstwie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
67. *Systemy wczesnego ostrzegania przed bankructwem przedsiębiorstw. Wskaźniki wczesnego ostrzegania*, badania prowadzone pod kierunkiem E. Mączyńskiej w ramach projektu badawczego KBN 1 H02C 029 18.
68. Tabachnick B.G., Fidell L.S., *Using multivariate statistics*, Pearson/Allyn & Bacon, 2007.
69. Tober J., *Niektóre metodologiczne problemy analiz strukturalnych w przemyśle*, Gospodarka Planowa, 1970, nr 7.
70. Walesiak M., *Metoda oceny podobieństwa struktur (na przykładzie struktury gałęziowej zatrudnienia w przemyśle uspołecznionym województw Polski)*, Wiadomości Statystyczne, 1980, nr 10.
71. Winiarski B., *Polityka gospodarcza*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
72. Zacher L., *Uwarunkowania i czynniki zmian struktury produkcji*, [w:] Wpływ przemian w strukturze gałęziowej i przestrzennej na wzrost gospodarczy (Materiały na konferencję naukową) cz. II, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1974.
73. Walczak M., *Prospektywna analiza finansowa w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 1999.

74. Walica H., *Zarządzanie kapitałem w przedsiębiorstwie, wykorzystanie i powiększanie majątku trwałego*, Wydawnictwo Triada, Dąbrowa Górnicza 1999.
75. Wiśniewski T., Skoczylas W., *Teoria i praktyka analizy finansowej w przedsiębiorstwie*, Wydawnictwo FRR w Polsce, Warszawa 2002.
76. *Współczesna analiza finansowa*, praca zbior. pod red. B. Micherdy, Kantor Wydawniczy Zakamycze, Zakamycze 2004.
77. Zalewska M., *Identyfikacja ryzyka upadłości przedsiębiorstwa i banku. Systemy wczesnego ostrzegania*, Difin, Warszawa 2002.
78. Zarzecki D., *O metodach oceny zagrożenia bankructwem i możliwościach ich wykorzystania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2000.
79. Zelek A., *Zarządzanie kryzysem w przedsiębiorstwie*, Orgmasz, Warszawa 2003.

## 1.10. ZAŁĄCZNIKI

### ZAŁĄCZNIK 1.1. STRUKTURA RAPORTU BADAWCZEGO – KOMPONENT MIKROEKONOMICZNY

#### 1. Cel i przedmiot badań nad SWO w obszarze mikroekonomicznym

- 1.1. Cel i struktura działań w ramach przyjętych ścieżek badawczych dla SWO a projekt ISR
- 1.2. Podmiotowy, przedmiotowy i czasowy zakres badań oraz źródła zasilenia informacyjnego

#### 2. Charakterystyka zmian działalności gospodarczej sektora przedsiębiorstw w Polsce

- 2.1. Zmiany liczby i struktury podmiotów gospodarczych w Polsce według sekcji działalności gospodarczej, sektorów własności, form prawno–organizacyjnych oraz województw
- 2.2. Analiza zjawiska upadłości podmiotów gospodarczych w ujęciu przedmiotowym (według rodzaju postępowania upadłościowego) w Polsce

#### 3. Zmiany potencjału i wyników ekonomicznych przedsiębiorstw w Polsce

- 3.1. Analiza zmian potencjału i sytuacji ekonomiczno–finansowej przedsiębiorstw w Polsce
- 3.2. Wieloprzekrojowa analiza kondycji ekonomiczno–finansowej przedsiębiorstw
- 3.3. Analiza cyklu rozwoju przedsiębiorstw na podstawie przebiegu pasm strategicznych oraz syntetycznego miernika rozwoju
- 3.4. Wielowymiarowa analiza kondycji ekonomiczno–finansowej przedsiębiorstw

#### 4. Analiza czynników i budowa modeli przewidywania stopnia zagrożenia przedsiębiorstwa upadłością

- 4.1. Identyfikacja zależności pomiędzy kondycją ekonomiczno–finansową przedsiębiorstwa a zagrożeniem upadłością
- 4.2. Badanie wrażliwości stopnia zagrożenia upadłością na zmiany mierników kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstwa
- 4.3. Testowanie skuteczności statystycznych metod identyfikacji stanu zagrożenia upadłością

**5. Analiza wpływu potencjalnych zmian o charakterze mikroekonomicznym na perspektywną ocenę zmiany stopnia zagrożenia przedsiębiorstw upadłością**

- 5.1. Wykorzystanie modeli jedno- i wielowymiarowych dla podstawowych zmiennych mikroekonomicznych określających stopień zagrożenia upadłością
- 5.2. Wykorzystanie możliwego prognozowania punktowego i przedziałowego dla zmiennych określających stopień zagrożenia przedsiębiorstw upadłością
- 5.3. Identyfikacja i analiza relacji zmiennych określających stopień zagrożenia upadłością dla celów modelowania prognostycznego
- 5.4. Ocena zmiany stopnia zagrożenia przedsiębiorstw upadłością z wykorzystaniem miar syntetycznych

Zasadniczym celem niniejszej części jest szczegółowe omówienie podejścia metodologicznego, przyjętego w pracach zespołu makroekonomicznego projektu *Instrumenty Szybkiego Reagowania*. Podstawowy przedmiot analiz, zarówno o charakterze teoretycznym, jak i empirycznym skupia się na trzech zagadnieniach. Po pierwsze przedstawiono metody wnioskowania o cyklach koniunkturalnych, ze szczególnym uwzględnieniem specyfiki polskiej gospodarki. Po drugie omówiono zasady konstrukcji prognoz podstawowych wskaźników makroekonomicznych, które będą stanowić podstawę opisu perspektyw wzrostu gospodarczego w naszym kraju. Po trzecie przedstawiono metodologię analiz scenariuszowych wpływu potencjalnych impulsów dotyczących polską gospodarkę na stan jej koniunktury, szczególnie w kwestii kondycji sektora przedsiębiorstw.

W podrozdziale 2.1. omówiono formalno-statystyczne podejście do modelowania cykli koniunkturalnych. Proponowane podejście bazuje na podstawie ekonometrycznej analizy wybranych wskaźników makroekonomicznych, które zaliczane są do tzw. grupy wskaźników cyklicznych. Wybrane wskaźniki makroekonomiczne będą stanowiły podstawę do sformułowania stylizowanych faktów na temat wahań aktywności gospodarczej w Polsce. Analiza będzie miała na celu m.in. identyfikację dominującej długości cyklu koniunkturalnego w Polsce. Interpretacji będą podlegać estymowane amplitudy zidentyfikowanych wahań, jak również estymowane ich fazy.

Podstawowy cel, jeśli chodzi o aspekt narzędziowy bloku makroekonomicznego, będzie realizowany poprzez zastosowanie autorskich wyników z zakresu statystyki matematycznej. Analiza cykliczności koniunkturalnej będzie oparta na wynikach uzyskanych w dziedzinie częstotliwości dla szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych. Istniejąca od dawna teoria spektralna dla klasy szeregów czasowych stacjonarnych, jak również teoria harmonizowanych szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych, będzie stanowić fundament w konstrukcji nowych narzędzi statystycznej analizy cykliczności koniunkturalnej. Główne wyniki teoretyczne w pracy z zakresu statystyki matematycznej dotyczą parametrów i ich estymatorów charakteryzujących zarówno spektrum dyskretne, jak i ciągłe szeregu czasowego prawie okresowo skorelowanego.

W analizach rozważone zostanie podejście, w którym zakłada się, że wahania aktywności gospodarczej mogą być modelowane w podejściu nieparametrycznym jednocześnie poprzez charakterystyki spektrum dyskretnego oraz ciągłego. W większości badań nad analizą cykliczności koniunkturalnej zakłada się, że wahania cykliczne to szereg czasowy o zerowej wartości oczekiwanej, co oznacza, że spektrum dyskretne dla tego szeregu czasowego jest tożsamościowo równe zero. Opracowane i stosowane podejście ma charakter oryginalny i nowatorski wobec standardowo stosowanych metod analizy

cykliczności koniunkturalnej opartych na teorii spektralnej i metodach filtracji dla procesów obserwowalnych z czasem dyskretnym.

W podrozdziale 2.2. przedstawiono propozycję wykorzystania ujęcia bayesowskiego w problemie krótkookresowego prognozowania wskaźników makroekonomicznych oraz pozycji cyklicznej gospodarki. Z racji krótkiego horyzontu prognozy, skupiono się na modelowaniu jednowymiarowych szeregów czasowych. Istotną cechą wyróżniającą omawiane podejście w stosunku do metod szeroko stosowanych w praktyce, jest formułowanie prognoz w kategoriach probabilistycznych, gdzie, oprócz przebiegu przyszłych wskaźników wyznaczającego prognozę punktową, rozważać będziemy niepewność prognoz. Uzyskane prognozy w postaci przedziałów prawdopodobieństw predyktywnych bazować będą na bayesowskim podejściu do estymacji parametrów modelu i prognozowania.

Podrozdział 2.2. wprowadza w ideę wnioskowania bayesowskiego, jak również omawiane są w nim specyfikacje modelowe stosowane w prognozie wskaźników makroekonomicznych. Wartością dodaną jest zaproponowanie nowatorskiej metody prognozowania pozycji cyklicznej gospodarki w oparciu o bayesowski model dla problemu estymacji parametrów procesów prawie okresowo skorelowanych (omawianych w podrozdziale 2.1.). Stosowane powszechnie w praktyce podejście bazujące na filtrach umożliwiające estymację cyklu, zaś z konstrukcji nie jest możliwa jakakolwiek prognoza pozycji cyklicznej poza rozważany okres. Zespół wypracował podejście, które umożliwia krótkookresową probabilistyczną prognozę składnika cyklicznego, co pozwoli na rozszerzenie analiz stanu polskiej gospodarki o perspektywę dotyczące koniunktury.

Podrozdział 2.3. poświęcono zagadnieniu modelowania wektorowych szeregów czasowych, ze szczególnym uwzględnieniem podejścia kointegracyjnego, bazującego na modelach wektorowej autoregresji (*Vector Autoregression Models*, VAR) i modelach wektorowych korekty błędu (*Vector Error Correction Models*, VECM). Omawiane metody skupiają się na formalno-statystycznym podejściu do testowania zależności długookresowych pomiędzy obserwowalnymi zmiennymi, prognozie i analizie scenariuszowej. Podrozdział prezentuje zarówno ujęcie klasyczne, jak i bayesowskie, estymacji parametrów modelu oraz prognozy.

Modelowanie wielowymiarowe, które jest przedmiotem rozważań w podrozdziale 2.3., zastosowano w ocenie skutków skokowych zmian kategorii makroekonomicznych. Te skokowe zmiany określa się mianem impulsów, zaś opracowanie opisuje – za literaturą metody ilościowej – oceny skutków ich zaistnienia w hipotetycznych scenariuszach makroekonomicznych. Przedmiotem bezpośredniego zainteresowania jest w tym aspekcie estymacja funkcji odpowiedzi na impuls, zarówno w ujęciu klasycznym jak i bayesowskim. W analizach empirycznych funkcja ta stanowić będzie podstawowe narzędzie oceny wrażliwości kondycji sektora przedsiębiorstw na impulsy występujące hipotetycznie w gospodarce.

Podobnie jak w przypadku prognoz, ilościowa ocena skutków wystąpienia określonych impulsów będzie prezentowana w kategoriach probabilistycznych. Oznacza to, iż

w analizach dokonana zostanie formalna ocena niepewności statystycznej co do wartości funkcji odpowiedzi na impuls. Umożliwi to ocenę wpływu niepewności statystycznej na formułowane konkluzje.

We wszystkich częściach opracowania umieszczono przykłady empiryczne, których zadaniem jest zilustrowanie działania proponowanych metod ekonometrycznych i statystycznych.

## **2.1. PROPOZYCJA FORMALNO-STATYSTYCZNEGO MODELOWANIA WAHAŃ AKTYWNOŚCI GOSPODARCZEJ**

W niniejszym rozdziale uwagę skupiono na przedstawieniu oryginalnej propozycji analizy wahań aktywności gospodarczej. Omawiane podejście nie dostarcza narzędzi prognozy wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej, a jedynie skupia uwagę na szczegółowej charakterystyce cykli koniunkturalnych odzwierciedlonej w wahaniami cyklicznych podstawowych wskaźników makroekonomicznych.

Intensywne badania nad empiryczną identyfikacją cykli koniunkturalnych, które na przestrzeni lat zaowocowały szerokim spektrum metod i narzędzi analizy cykliczności koniunkturalnej, nie wyłoniły wiodącej metody, akceptowalnej przez większość badaczy. W literaturze przedmiotu można wyróżnić jedynie te najczęściej stosowane, spośród których najpopularniejsze wydaje się podejście, polegające na ekstrakcji wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej przy zastosowaniu metod filtracji. Stosowanymi na tym gruncie metodami są filtry: Hodricka i Prescottta (patrz: Hodrick i Prescott (1997)), Baxtera i Kinga (patrz: Baxter i King (1999)), Christiano i Fitzgeralda (patrz: Christiano i Fitzgerald (2003)), czy Butterwortha (patrz: Gómez (2001)). W literaturze można znaleźć liczne uwagi o charakterze polemicznym w kwestiach związanych z automatycznym stosowaniem tych metod. Niewłaściwe zastosowanie omawianego podejścia prowadzi do wyodrębnienia pozornych cykli koniunkturalnych (patrz dla przykładu: Nelson i Kang (1981), Kaiser i Moravall (1999), Gómez (2001), Shenk-Hoppé (2001)).

W szczególności metody wypracowane i sprawdzone w gospodarkach wysokorozwiniętych mogą nie dostarczać badaczowi wyników pozwalających na formułowanie jednoznacznych wniosków na przykład w przypadku gospodarek w okresie transformacji. Powód może znajdować się po stronie cech jakimi mogą charakteryzować się wahania cykliczne w gospodarkach okresu transformacji w porównaniu z cechami tychże wahań w przypadku gospodarek wysokorozwiniętych. Cechy wahań cyklicznych gospodarek w okresie transformacji opisują Barczyk i inni (2006), podkreślając ich odrębność i znaczne zróżnicowanie względem przebiegu cyklu w gospodarkach rozwiniętych. W przypadku gospodarek wysokorozwiniętych wahania aktywności gospodarczej (wokół ścieżki



wzrostu/spadku) uległy bowiem „spłaszczeniu” – stąd przeważający pogląd o potrzebie ich modelowania przy zastosowaniu procesów stacjonarnych o zerowej wartości oczekiwanej. Cecha ta nie musi jednak towarzyszyć wahaniom spowodowanym zmianami koniunkturalnymi dla gospodarek okresu transformacji (ze względu na prawdopodobieństwo większej intensywności oraz amplitudy wahań). Stąd motywacja do przyjęcia ogólniejszych założeń modelowych typu POS, które w szczególnym przypadku sprowadzić można do założenia stacjonarności procesu. Wybór pomiędzy stacjonarnością a założeniem typu POS będzie rozstrzygnięty w proponowanym podejściu poprzez zastosowanie odpowiednich testów statystycznych.

Analiza wahań aktywności gospodarczej może być utrudniona także z powodu braku dostatecznie obszernego materiału statystycznego mogącego prowadzić do silnych konkluzji o naturze cykli. Na problem niepewności co do wniosków dotyczących analizy cykliczności koniunkturalnej gospodarki polskiej, mających swe źródło w zbyt krótkich szeregach czasowych, zwrócono uwagę w opracowaniu Adamowicz i inni (2008), gdzie stosowano alternatywne metody filtracji wraz z analizą wyodrębnionych wahań, zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Problemem identyfikacji długości cykli koniunkturalnych w Polsce, wraz z analizą stopnia ich synchronizacji z krajami strefy euro, zajmowali się m.in. autorzy prac i opracowań: Skrzypczyński (2006), Skrzypczyński (2008), Adamowicz i inni (2008), Skrzypczyński (2010), Konopczak (2009), Gradzewicz i inni (2010).

W tym rozdziale zaprezentowano metodę analizy cykliczności koniunkturalnej, która ma swe uzasadnienie teoretyczne. Własności małopróbkowe metod statystycznych, na których opiera się algorytm, zostały przebadane w Lenart (2010). Przedmiotem bezpośredniego zainteresowania są narzędzia estymacji parametrów utożsamianych z długością wahań aktywności gospodarczej ich amplitudą oraz fazą. Zaprezentowana metodologia bazuje na podstawowych własnościach podklasy niestacjonarnych procesów stochastycznych, to jest procesów prawie okresowo skorelowanych. Głównym rezultatem proponowanej procedury algorytmu są estymatory parametrów utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej. Stanowi to podstawę do ustalenia parametrów koniecznych przy zastosowaniu filtru Hodricka i Prescottta.

Proponowane podejście metodologiczne opiera się na ekonometrycznej analizie makroekonomicznych szeregów czasowych. Modelowaniu podlegają dane historyczne, przez co bardzo trudno w sposób formalny uwzględnić podczas modelowania (mogące mieć miejsce) istotne zmiany natury cyklu koniunkturalnego gospodarki polskiej, wynikające choćby z procesów konwergencji.

Podejście metodologiczne zaprezentowane w dalszych paragrafach opiera się na bardziej szczegółowych opracowaniach o tej tematyce zawartych w Lenart (2010) oraz Lenart i Pipień (2011). Część definicji zawartych w tym rozdziale przytoczono bezpośrednio z Lenart (2010), gdzie podano ich źródłowe pochodzenie. Większą uwagę skupiono jednak na samej interpretacji w kontekście badań nad wahaniami aktywności gospodarczej, korzystając przy tym z komentarzy i wniosków z opracowań Lenart (2010) oraz Lenart i Pipień (2011).

### 2.1.1. PROCESY STOCHASTYCZNE PRAWIE OKRESOWO SKORELOWANE – PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Na wstępie przedstawiono definicję klasy szeregów czasowych okresowo i prawie okresowo skorelowanych. W dalszej kolejności przytoczono definicje i własności funkcji prawie okresowych, które mają ścisły związek z definicją i własnościami szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych<sup>1</sup>. W końcowej części paragrafu przedstawiono definicję amplitudy oraz fazy wahań w odniesieniu do reprezentacji funkcji wartości oczekiwanej rozważanego procesu w postaci szeregu Fouriera.

Pojęcia funkcji okresowych i prawie okresowych są pierwotne w stosunku do definicji szeregów czasowych okresowo i prawie okresowo skorelowanych w sensie szerszym. Po raz pierwszy klasę szeregów czasowych okresowo skorelowanych (*periodically correlated*) zdefiniował Gladyshev (1961). Często szeregi czasowe okresowo skorelowane oraz odpowiednio prawie okresowo skorelowane nazywane są szeregami cyklostacjonarnymi, lub prawie cyklostacjonarnymi *cyclostationary time series* oraz odpowiednio *almost cyclostationary time series* (patrz: Gardner i inni (2006)). Rozważmy szereg czasowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  o funkcji wartości oczekiwanej

$$\mu(t) = E(X_t) < \infty$$

oraz funkcji autokowariancji

$$B(t, \tau) = \text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) < \infty,$$

gdzie  $\tau \in \mathbb{Z}$ . Wprowadźmy definicję szeregów czasowych okresowo skorelowanych.

**Definicja 1.1** (Gladyshev 1961) *Mówimy, że szereg czasowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  jest okresowo skorelowany w sensie szerszym (w skrócie OS) z okresem równym  $T$ , jeśli dla każdego  $\tau \in \mathbb{Z}$  funkcje  $\mu(t)$  oraz  $B(t, \tau)$  są funkcjami okresowymi zmiennej całkowitoliczbowej  $t$  z okresem równym  $T$ .*

Aby zdefiniować klasę szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych w sensie szerszym podamy najpierw definicję funkcji prawie okresowej, zaczerpniętą z monografii Corduneanu (1989).

**Definicja 1.2** (Corduneanu 1989, s. 45) *Funkcję zmiennej całkowitej  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy prawie okresową, jeśli dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba całkowita  $N_\varepsilon$ , taka że w każdym zbiorze  $N_\varepsilon$  – elementowym kolejnych liczb całkowitych istnieje taka liczba  $p$ , dla której zachodzi*

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |f(t+p) - f(t)| < \varepsilon.$$

<sup>1</sup>Patrz również: Besicovitch (1932) oraz Corduneanu (1989).

Aby przybliżyć pojęcie funkcji prawie okresowej rozważmy funkcję  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  postaci

$$h(t) = \sin(\sqrt{2}t). \quad (1)$$

Funkcja ta nie jest funkcją okresową zmiennej całkowitoliczbowej  $t$ , co w prosty sposób można uzasadnić stosując dowód nie wprost. Funkcja  $h$  jest natomiast funkcją prawie okresową.

Każda funkcja okresowa o okresie równym  $T$  jest również funkcją prawie okresową. Rodzina funkcji prawie okresowych jest zamknięta ze względu na operacje dodawania oraz iloczynu (patrz Corduneanu 1989, s. 46). Podstawową własnością funkcji prawie okresowej  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  jest fakt, iż granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+n} f(t) \quad (2)$$

istnieje i nie zależy od wartości parametru całkowitoliczbowego  $t_0$  (patrz: Corduneanu 1989, Twierdzenie 1.28, s. 48). Granicę tą nazywamy wartością średnią funkcji prawie okresowej. Jak pokazano w Lenart (2010) oraz Lenart i Pipień (2011) własność ta jest fundamentalna w estymacji parametrów utożsamianych z częstotliwościami odpowiedzialnymi za wahania koniunkturalne.

Definicja klasy szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych jest naturalnym uogólnieniem definicji klasy szeregów czasowych okresowo skorelowanych.

**Definicja 1.3** *Mówimy, że szereg czasowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  jest prawie okresowo skorelowany w sensie szerszym (w skrócie POS), jeśli dla każdego  $\tau \in \mathbb{Z}$  funkcje  $\mu(t)$  oraz  $B(t, \tau)$  są funkcjami prawie okresowymi zmiennej całkowitoliczbowej  $t$ .*

Każdy szereg czasowy stacjonarny jest również okresowo skorelowany, zaś każdy szereg czasowy okresowo skorelowany jest prawie okresowo skorelowany.

Aby w sposób intuicyjny wyjaśnić różnicę pomiędzy funkcją okresową i prawie okresową, rozważmy prosty przykład funkcji okresowej  $f(t)$  o okresie równym  $T = 12$ . Korzystając z elementarnych własności funkcji okresowych funkcja  $f$  ma reprezentację

$$f(t) = \sum_{k=0}^{T-1} b_k e^{it\omega_k}, \quad (3)$$

gdzie  $b_k$  są liczbami zespolonymi, zaś częstotliwości  $\omega_k$  są równe  $\omega_k = 2k\pi/T$ , dla  $k = 0, 1, \dots, T-1$ . Jak łatwo zauważyć, charakterystyczną własnością funkcji okresowej jest to, że w reprezentacji (3) częstotliwości  $\omega_k$  zależą od okresu  $T$  (są ściśle określone). Zakładając natomiast, że funkcja  $f(t)$  jest funkcją prawie okresową postaci

$$f(t) = \sum_{k=0}^K b_k e^{it\omega_k}, \quad (4)$$

zakładamy jedynie, że  $\omega_k$  są liczbami z przedziału  $[0, 2\pi)$ , zaś  $K$  jest dowolną liczbą naturalną.

W dalszej kolejności przedstawiono reprezentację funkcji wartości oczekiwanej i autokowariancji w postaci szeregów Fouriera:

$$\mu(t) : \sum_{\psi \in \Psi} m(\psi) e^{i\psi t}, \quad (5)$$

$$B(t, \tau) : \sum_{\lambda \in \Lambda_\tau} a(\lambda, \tau) e^{i\lambda t}, \quad (6)$$

gdzie współczynniki  $m(\psi)$  oraz  $a(\lambda, \tau)$  są równe

$$m(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mu(t) e^{-i\psi t}, \quad (7)$$

$$a(\lambda, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B(j, \tau) e^{-i\lambda j}.$$

Zbiory

$$\Psi = \{\psi \in [0, 2\pi) : m(\psi) \neq 0\}$$

oraz

$$\Lambda_\tau = \{\lambda \in [0, 2\pi) : a(\lambda, \tau) \neq 0\}$$

są przeliczalne (patrz Corduneanu 1989). Jeśli szereg czasowy jest okresowo skorelowany, wtedy reprezentacje (5) oraz (6) stają się równościami, zaś zbiory  $\Psi$  oraz  $\Lambda$  są zawarte w zbiorze:

$$\{2k\pi/T : k = 0, 1, \dots, T-1\},$$

gdzie  $T$  jest długością okresu.

Punktem wyjścia w klasycznej analizie wahań aktywności gospodarczej jest założenie o stacjonarności wyodrębnionych wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej. Założenie to nie jest jednak w większości przypadków weryfikowane, poza zastosowaniem testów pierwiastka jednostkowego. Warunek stacjonarności tych wahań jest równoważny z warunkiem, iż mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem procesu prawie okresowo skorelowanego, dla którego zachodzą równości:  $\Psi = \{0\}$  oraz  $\Lambda = \{0\}$ . Równości te nie muszą być jednak uzasadnione, zważywszy na liczne przypadki modelowania makroekonomicznych szeregów czasowych zawierających komponent utożsamiany z wahaniami aktywności gospodarczej przy zastosowaniu modeli o niestacjonarnej, okresowej

strukturze funkcji autokowariancji (patrz dla przykładu: Franses i Paap (2004)). Proponowane podejście do badania wahań aktywności gospodarczej stanowi zatem uogólnienie, w ramach którego jest możliwe testowanie przyjmowanego powszechnie założenia o stacjonarności.

W proponowanym podejściu zespołu makroekonomicznego modelowanie wahań cyklicznych odbywa się zatem przy ogólniejszych założeniach (warto zaznaczyć, iż klasa szeregów czasowych POS zawiera klasę szeregów czasowych stacjonarnych). Zakłada się bowiem, że podstawowe własności wahań cyklicznych takie jak: długość wahań, amplituda, ich asymetria oraz faza, mogą być modelowane poprzez parametry nietrywialnego spektrum dyskretnego szeregu czasowego POS. Korzystając z podstawowej reprezentacji Fouriera funkcji wartości oczekiwanej szeregu czasowego POS pewne częstotliwości w tej reprezentacji będą utożsamiane z tymi odpowiedzialnymi za wahania spowodowane zmienną koniunkturą, inne zaś za wahania sezonowe. Prawie okresowość funkcji wartości oczekiwanej szeregów czasowych POS może przyczynić się do lepszego (w sensie dopasowania empirycznego modelu do danych) opisu cech wahań aktywności gospodarczej.

Założenie o prawie okresowości funkcji wartości oczekiwanej jest bardzo wygodne również z ekonomicznego punktu widzenia. W rozważaniach na temat przyczyn wahań koniunkturalnych możemy uwzględnić wpływ zmiennych endogenicznych i egzogenicznych, efekt transmisji koniunktury pomiędzy różnymi gospodarkami, efekt mnożnika inwestycyjnego, jak również efekty interakcji i nakładania się tych przyczyn. Przyjmując założenie, iż każda z tych wielu przyczyn generuje zmiany cykliczne koniunktury (typu „falowego”), założenie o prawie okresowości funkcji wartości oczekiwanej wydaje się intuicyjnie nie wprowadzać ograniczeń do tak budowanych koncepcji i teorii cyklu koniunkturalnego.

---

### 2.1.2. ESTYMACJA PROCESÓW POS Z WYKORZYSTANIEM METOD PODPRÓBKOWANIA

Parametry bezpośrednio utożsamiane z wahaniami aktywności gospodarczej są zawarte w zbiorze  $\Psi$ . W niniejszym paragrafie uwagę skupiono na problemie estymacji wybranych elementów zbioru  $\Psi$ . W opracowaniu Lenart (2010) sformułowano i udowodniono twierdzenia z zakresu statystyki matematycznej dotyczące identyfikacji i estymacji parametrów zbioru  $\Psi$ . Metoda identyfikacji tych parametrów jest oparta na znanej, w literaturze z zakresu statystyki matematycznej, metodzie podpróbkiwania (*subsampling*, patrz: Politis i inni (1999)).

W dalszej części przytoczono ideę metody podpróbkiwania z opracowania Lenart (2010), które z kolei oparte jest na wynikach zawartych w monografii Politis i inni (1999).

Niech  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  będzie  $n$ -elementową próbką z rzeczywistego szeregu czasowego  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  o łącznym rozkładzie  $P$ . Przez  $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  oznaczymy estymator nieznanego parametru rzeczywistego  $\theta = \theta(P)$ . Wersję podpróbki estymatora  $\hat{\theta}_n$  oznaczamy jako  $\hat{\theta}_{n,b,t}$  i obliczamy jako wartość estymatora  $\hat{\theta}_n$  opartą na podpróbce  $\{X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+b-1}\}$ , gdzie  $1 \leq t \leq n-b+1$  można interpretować jako punkt startu dla podpróbki, zaś  $b = b(n)$  jako jej długość. Jednym z podstawowych założeń procedury podpróbki jest założenie, że  $b/n \rightarrow 0$  oraz  $b \rightarrow \infty$ . Niech  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Jeśli interesuje nas aproksymacja metodą podpróbki rozkładu wielkości:

$$\nu_n(\hat{\theta}_n - \theta), \quad (8)$$

wtedy dystrybuantę tego rozkładu dla dowolnego punktu  $x \in \mathbb{R}$  przybliżamy podpróbkowym estymatorem postaci:

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}\{\nu_n(\hat{\theta}_{n,b,t} - \hat{\theta}_n) \leq x\}. \quad (9)$$

Kolejnym podstawowym założeniem metody podpróbki jest założenie, że rozkład asymptotyczny wielkości (8) istnieje. Aby wyjaśnić zgodność metody podpróbki, oznaczmy przez  $J(P)$  rozkład graniczny wielkości  $\nu_n(\hat{\theta}_n - \theta)$ , zaś przez  $J(x)$  wartość dystrybuanty rozkładu  $J(P)$  w punkcie  $x$ . Niech  $c(1-\alpha)$  oraz  $c_{n,b}(1-\alpha)$  będą odpowiednio kwantylami rzędu  $1-\alpha$  z rozkładu  $J(P)$  oraz rozkładu podpróbkowego, czyli

$$c(1-\alpha) = \inf\{x : J(x) \geq 1-\alpha\},$$

$$c_{n,b}(1-\alpha) = \inf\{x : L_{n,b}(x) \geq 1-\alpha\}.$$

Przy takich oznaczeniach mówimy, że procedura podpróbki jest zgodna, jeśli:

$$(i) \quad L_{n,b}(x) \xrightarrow{P} J(x), \text{ dla każdego punktu ciągłości dystrybuanty } J(\cdot),$$

$$(ii) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |L_{n,b}(x) - J(x)| \xrightarrow{P} 0,$$

w przypadku ciągłości dystrybuanty  $J(\cdot)$  na osi rzeczywistej,

$$(iii) \quad \text{dla dowolnego punktu } c(1-\alpha) \text{ ciągłości dystrybuanty } J(\cdot) \text{ zachodzi}$$

$$P(\nu_n(\hat{\theta}_n - \theta) \leq c_{n,b}(1-\alpha)) \rightarrow 1-\alpha,$$

gdzie  $\alpha \in (0,1)$ .

Warunki wystarczające zgodności metody podpróbkowania w przypadku niestacjonarnych szeregów czasowych sformułowano w Założeniach 4.2.1 oraz 4.2.2 w monografii Politis i inni (1999, s. 102-103). Zauważmy, że do konstrukcji estymatora (9) nie jest wymagana znajomość rozkładu asymptotycznego wielkości (8), co jest bardzo wygodne w przypadku, gdy rozkład ten nie jest dokładnie znany lub bardzo skomplikowany.

Praktyczne zastosowanie metody podpróbkowania napotyka jednak na pewne niedogodności. Ograniczenie wprowadza niewątpliwie warunek  $b/n \rightarrow 0$ , bez którego, jak wynika z monografii Politis i inni (1999), dowód zgodności procedury wydaje się być niemożliwy. Metoda podpróbkowania może być bowiem wrażliwa na zmiany parametru  $b$ . Taki wniosek uzyskano również w pracy Lenart i inni (2008), badając własności testu opartego na rozkładzie podpróbkowym dla szeregów czasowych OS. Wartość optymalna parametru  $b$  nie jest znana, poza kilkoma szczególnymi przypadkami.

W opracowaniu Lenart (2010) udowodniono zgodność procedury podpróbkowania w klasie niestacjonarnych szeregów czasowych dla estymatora współczynnika Fouriera  $m(\psi)$  dla dowolnego  $\psi \in [0, 2\pi)$ , co prowadzi z kolei do konstrukcji testu statystycznego<sup>2</sup>, na podstawie którego identyfikowane są częstotliwości zbioru  $\Psi$ . Metodologia ta opisana zostanie w kolejnym paragrafie.

### 2.1.3. PROPOZYCJA CZTEROSTOPNIOWEJ PROCEDURY EKSTRAKЦИИ CYKLU KONIUNKTURALNEGO

W tym paragrafie przedstawimy czterostopniową procedurę ekstrakcji cyklu koniunkturalnego opisaną szczegółowo w Lenart (2010) oraz Lenart i Pipień (2011).

Niech  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  będzie obserwowanym szeregiem czasowym. Dla ustalenia uwagi koncentrujemy się na szeregach obserwowanych z częstotliwością miesięczną<sup>3</sup>. Zakładamy, że  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  to szereg czasowy o skończonej bezwarunkowej wartości oczekiwanej<sup>4</sup>, dla dowolnej chwili czasowej  $t \in \mathbb{Z}$ . Równanie modelu opiera się o założenie, że funkcja wartości oczekiwanej  $\mu_p(t) = E(P_t)$  jest sumą funkcji  $f(t, \beta)$  argumentu  $t \in \mathbb{Z}$  i parametru  $\beta \in \mathbb{R}^s$  oraz funkcji prawie okresowej:

$$g(t) = \sum_{\psi \in \Psi_p} m_p(\psi) e^{i\psi t} \quad (10)$$

<sup>2</sup>Test ten jest testem asymptotycznie zgodnym.

<sup>3</sup>Analogicznie można rozważać szereg czasowy w ujęciu kwartalnym lub innym.

<sup>4</sup>Przykładem takiego szeregu czasowego może być szereg czasowy spełniający równanie szeregu  $I(d)$ , gdzie  $d \in \mathbb{N}$ , z dodatkowymi warunkami postaci  $E(X_j) < \infty$ , dla  $j = -d + 1, -d + 2, \dots, 0$ .

argumentu  $t \in \mathbb{Z}$ , gdzie  $\Psi_p \subset [0, 2\pi)$ . Równanie modelu ma zatem postać

$$\mu_p(t) = f(t, \beta) + g(t) = f(t, \beta) + \sum_{\psi \in \Psi_p} m_p(\psi) e^{i\psi t}. \quad (11)$$

Dla zbioru  $\Psi_p$  stosujemy naturalną reprezentację postaci

$$\Psi_p = \Psi_{p,1} \cup \Psi_{p,2} \cup \Psi_{p,3}, \quad (12)$$

gdzie zbiór  $\Psi_{p,1}$  to zbiór zawierający częstotliwości utożsamiane z częstotliwościami odpowiedzialnymi za wahania koniunkturalne, zbiór  $\Psi_{p,2}$  to zbiór częstotliwości odpowiedzialnych za wahania sezonowe, zaś zbiór  $\Psi_{p,3}$  to zbiór pozostałych częstotliwości. Do zbioru  $\Psi_{p,1}$  zaliczamy takie częstotliwości, które odpowiadają cyklom o długości od półtora roku do nieskończoności<sup>5</sup>, co oznacza, że

$$\Psi_{p,1} \cap (0, 0.35) = \Psi_{p,1}.$$

Zbiór  $\Psi_{p,1}$  zawiera zatem częstotliwości będące obiektem zainteresowania. Zbiór  $\Psi_{p,2}$  utożsamiamy z przecięciem zbioru  $\Psi_p$  ze zbiorem częstotliwości  $\{2k\pi/T : k=1, 2, \dots, T-1\}$ , gdzie  $T$  to liczba okresów w roku w rozważanych danych. Natomiast, zbiór  $\Psi_{p,2}$  zawiera pozostałe częstotliwości, np. te odpowiedzialne za interakcję wahań sezonowych i wahań cyklicznych utożsamianych z wahaniami spowodowanymi zmianami w koniunkturze gospodarczej<sup>6</sup>.

W rozważaniach będziemy przyjmować, że funkcja  $f(t, \beta)$  jest wielomianem stopnia co najwyżej drugiego, czyli  $f(t, \beta) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_p t^p$ , gdzie  $p \leq 2$ . Wartość parametru  $p$  będzie przyjmowana w zależności od wskaźnika makroekonomicznego jako 1 lub 2, po obserwacji graficznej realizacji pierwszych lub drugich różnic rozważanego szeregu czasowego. Zaznaczmy, iż funkcja  $f(t, \beta)$  może nie zawierać wyrazu wolnego, ponieważ wyraz wolny jest naturalnym wyrazem szeregu trygonometrycznego  $g(t)$ <sup>7</sup>. Rozważmy przykład szeregu czasowego spełniającego dotychczasowe założenia sformułowane w równaniu modelowym (11).

**Przykład 3.1** Niech szereg czasowy  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  będzie postaci

$$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t,$$

gdzie  $E(P_0) = b$  oraz  $\{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$  to szereg czasowy POS o funkcji wartości oczekiwanej (bezw warunkowej)  $\mu_\varepsilon(\cdot)$  spełniającej równanie

$$\mu_\varepsilon(t) = a + g(t) - g(t-1),$$

<sup>5</sup>Nie wszystkie częstotliwości z tego zbioru utożsamiamy z wahaniami aktywności gospodarczej.

<sup>6</sup>Przykład szeregu czasowego spełniającego równanie modelowe (11) można znaleźć w Lenart (2010).

<sup>7</sup>Warunkiem wystarczającym na to jest aby  $\Psi_p \cap \{0\} \neq \emptyset$ .



gdzie  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  to funkcja prawie okresowa postaci:

$$g(t) = \sum_{\psi \in \Psi} m(\psi) e^{i\psi t},$$

$a \in \mathbb{R}$  oraz  $\text{card}(\Psi) < \infty$ . Zauważmy, że dla dowolnego  $t \geq 1$  mamy

$$P_t = P_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t.$$

Dlatego

$$E(P_t) = b + \sum_{j=1}^t E(\varepsilon_j) = b + at - g(0) + g(t) = f(t, \beta) + g(t),$$

gdzie  $f(t, \beta) = \beta_0 + \beta_1 t$ ,  $\beta_0 = b - g(0)$ ,  $\beta_1 = a$ , co oznacza, że rozważany szereg czasowy  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  spełnia równanie (11). Zauważmy, że jeśli przyjmiemy  $g(t) \equiv 0$ , wtedy  $\mu_\varepsilon(t) = a$ , co oznacza, że szereg czasowy  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  spełnia równanie  $I(1)$  z dryfem z warunkiem dodatkowym  $E(P_0) = b$ .

Poniżej przytoczono procedurę identyfikacji i estymacji parametrów modelu (przedstawiony w postaci algorytmu składającego się z czterech etapów) z opracowania Lenart (2010). W większości przypadków przed zastosowaniem tego algorytmu realizacja danego szeregu czasowego będzie poddana operacji logarytmowania, logarytmem o podstawie naturalnej<sup>8</sup>.

### **Etap 1. Osłabienie wahań sezonowych**

Zważywszy na fakt, że w większości miesięcznych wskaźników makroekonomicznych obecne są wahania sezonowe spowodowane zmianami pór roku, oczywiste wydaje się być spostrzeżenie, że

$$\Psi_p \cap \{2k\pi/12 : k = 1, 2, \dots, 11\} \neq \emptyset,$$

co oznacza że zbiór  $\Psi_p$  zawiera pewne częstotliwości odpowiedzialne za wahania sezonowe. Identyfikacja parametrów modelu utożsamianych z wahaniami cyklicznymi nie jest jednak kluczowym celem podczas badań nad aktywnością gospodarczą. Chcąc wyeliminować wahania sezonowe oraz jednocześnie wzmocnić wahania koniunkturalne będziemy stosować dla rozważanego wskaźnika filtr z rodziny scentrowanej średniej ruchomej. Jedną z możliwości jest wspomniany już operator typu 2x12MA (patrz: Makridakis i inni (1998), Brockwell i Davis (2002)). Działając operatorem 2x12MA otrzymujemy szereg czasowy  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  dla którego:

<sup>8</sup>Po operacji logarytmowania wyodrębniony cykl (przy zastosowaniu kroków Etapu 4) pozwoli na interpretację tych wahań jako cyklu odchyłeń. Kolejnym celem operacji logarytmowania jest ewentualne wyrównanie amplitudy wahań sezonowych, co ułatwi ich osłabienie w Etapie 1 algorytmu.

$$Y_t = L_{2 \times 12}(B)P_t,$$

gdzie

$$L_{2 \times 12}(B) = (B^{-6} + 2B^{-5} + \dots + 2B^{-1} + 2 + 2B + \dots + 2B^5 + B^6)/24,$$

zaś  $B^k P_t = P_{t-k}$  dla dowolnych całkowitoliczbowych wartości czasu  $t$  i przesunięcia  $k$ . Zauważmy, że dla szeregu czasowego  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  bezwarunkowa wartość oczekiwana istnieje. Korzystając z Twierdzenia B.1 otrzymujemy funkcję bezwarunkowej wartości oczekiwanej szeregu czasowego  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  postaci

$$\mu_Y(t) = E(Y_t) = \underbrace{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 t + \dots + \tilde{\beta}_p t^p}_{\tilde{f}(t, \tilde{\beta})} + \sum_{\psi \in \Psi_Y} m_Y(\psi) e^{i\psi t}, \quad (13)$$

gdzie

$$\Psi_Y \cap \{2k\pi/12 : k = 1, 2, \dots, 11\} = \emptyset$$

oraz

$$\Psi_Y = \Psi_P \setminus \{2k\pi/12 : k = 1, 2, \dots, 11\}.$$

Oznacza to, że szereg czasowy  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  zawiera te same częstotliwości w zbiorze  $\Psi_Y$  co szereg czasowy  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  w zbiorze  $\Psi_P$ , po odjęciu częstotliwości odpowiedzialnych za wahania sezonowe. Dodatkowo, dla współczynników  $m_p(\psi)$  oraz  $m_Y(\psi)$  zachodzi zależność:

$$m_Y(\psi) = L_{2 \times 12}(e^{-i\psi}) m_p(\psi). \quad (14)$$

Dla współczynników  $\tilde{\beta}_k$  oraz  $\beta_k$  otrzymujemy  $\tilde{\beta}_k = \beta_k$ , dla  $k = p$  oraz  $k = p-1$ , co oznacza, że dla  $p=0$  oraz  $p=1$  współczynniki wielomianów się nie zmieniają. W przypadku, gdy  $p=2$  zmienia się jedynie wyraz wolny wielomianu<sup>9</sup>.

Etap 1. będzie wykonywany dla wszystkich rozważanych wskaźników makroekonomicznych podczas analizy cykliczności koniunkturalnej bez względu na uzasadnienie obecności wahań sezonowych. Powodem są własności jakie posiada filtr

<sup>9</sup>Szereg czasowy  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  nie jest w tym momencie traktowany jako estymator (zgodny w odpowiednim sensie probabilistycznym, np. średnio-kwadratowym) trendu ani też jako estymator sumy trendu i wahań cyklicznych. Szereg ten jest przekształceniem rozważanego szeregu czasowego  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$ , tak aby ze zbioru częstotliwości  $\Psi_P$  usunąć częstotliwości odpowiedzialne za wahania sezonowe. Co więcej, oprócz zgodności tych częstotliwości można w sposób bardzo naturalny i intuicyjny uzasadnić dlaczego proces średniej ruchomej może być w nieformalnym sensie *identyfikowany* z wahaniami rozważanego szeregu czasowego, z pominięciem jedynie wahań sezonowych. Otóż różnica w wartościach średniej ruchomej informuje nas o różnicy w całorocznej średniej. Biorąc pod uwagę fakt, iż średnia jest całoroczna, nie uwzględniamy różnic spowodowanych zmianami pór roku a jedynie różnice spowodowane generalną tendencją w rozważanym szeregu czasowym i innymi zmianami z uwzględnieniem zmian koniunkturalnych.

2x12MA, po zastosowaniu którego wahania przypadkowe zostają osłabione, co ułatwi kolejne etapy analizy.

## Etap 2. Eliminacja trendu

Kolejnym krokiem, który proponujemy w algorytmie identyfikacji częstotliwości zbioru  $\Psi_p$  w reprezentacji (11) jest zastosowanie operatora eliminującego ewentualny trend z szeregu czasowego  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . Przypomnijmy, że w pracy rozważamy jedynie przypadek, w którym funkcja  $f(t, \beta)$  jest wielomianem stopnia  $p$ , gdzie  $p \leq 2$ . Rozważymy zatem dwa przypadki.

*Przypadek 1.* Niech  $p = 1$ . Stosując operator  $L_1(B) = (1 - B)$  dla szeregu czasowego średniej ruchomej otrzymujemy szereg czasowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  postaci:

$$X_t = L_1(B)Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (P_{t+6} - P_{t-6} + P_{t+5} - P_{t-7})/24.$$

Wartość oczekiwana dla szeregu czasowego  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  istnieje i jest funkcją prawie okresową daną wzorem:

$$\mu_X(t) = \beta_1 + \sum_{\psi \in \Psi_X} m_X(\psi) e^{i\psi t}, \quad (15)$$

gdzie

$$\Psi_X = \Psi_p \setminus \{2k\pi/12 : k = 0, 1, 2, \dots, 11\},$$

co wynika z Twierdzenia B.1. Dodatkowo:

$$m_X(\psi) = L_1(e^{-i\psi})m_Y(\psi) = L_1(e^{-i\psi})L_{2 \times 12}(e^{-i\psi})m_P(\psi). \quad (16)$$

oraz

$$\Psi_X \cap (0, 0.35) = \Psi_{p,1}. \quad (17)$$

Należy zwrócić uwagę, iż wartość oczekiwana szeregu czasowego  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  jest funkcją prawie okresową, dla której Warunek 1.5.1 jest spełniony. Tak otrzymany szereg wynikowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  można identyfikować z dynamiką zmian szeregu czasowego  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$ .

*Przypadek 2.* Dla  $p = 2$  stosujemy operator  $L_2(B) = (1 - B)^2$ . W ten sposób otrzymujemy szereg

$$X_t = (1 - B)(P_{t+6} - P_{t-6} + P_{t+5} - P_{t-7})/24,$$

$$\mu_X(t) = \tilde{\beta}_2 + \sum_{\psi \in \Psi_X} m_X(\psi) e^{i\psi t}, \quad (18)$$

gdzie

$$m_x(\psi) = L_2(e^{-i\psi})m_y(\psi) = L_2(e^{-i\psi})L_{2 \times 12}(e^{-i\psi})m_p(\psi), \quad (19)$$

$$\Psi_x = \Psi_p \setminus \{2k\pi/12 : k = 0, 1, 2, \dots, 11\}.$$

Analogicznie jak w przypadku, gdy  $p = 1$  otrzymujemy

$$\Psi_x \cap (0, 0.35) = \Psi_{p,1}. \quad (20)$$

W tym miejscu warto wyjaśnić, dlaczego przed przystąpieniem do wyznaczania pierwszych lub drugich różnic nie wykonujemy znanych w literaturze testów pierwiastka jednostkowego ADF (*Augmented Dickey-Fuller*). Powodem jest brak w literaturze uzasadnienia dla stosowania testu ADF w przypadku gdy zakładamy, że wartość oczekiwana rozważanego szeregu czasowego zależy od wartości nietrywialnej funkcji prawie okresowej. Operacja różnicowania, która jest wykonywana w Etapie 2. jest postrzegana w kategoriach filtru, dzięki któremu wyeliminowany zostanie ewentualny składnik trendu liniowego, bądź trendu stochastycznego. Nieuzasadnione stosowanie filtru różnicowania nie powoduje bowiem utraty żadnych informacji (z formalnego punktu widzenia) o częstotliwościach utożsamianych ze zmianami koniunktury (patrz formuły (17), (20)).

### **Etap 3. Identyfikacja i estymacja częstotliwości**

Identyfikacja i estymacja częstotliwości w zbiorze  $\Psi_p$  dla szeregu czasowego  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  sprowadza się zatem do ich identyfikacji na podstawie realizacji szeregu czasowego  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ <sup>10</sup>. Na potrzeby dalszego rozumowania sformułujemy dodatkowe założenie dotyczące szeregu czasowego  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . Założenie to umożliwi identyfikację częstotliwości zbioru  $\Psi_p$  szeregu czasowego  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  na podstawie realizacji szeregu czasowego  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . Przyjmijmy zatem, że szereg czasowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  jest szeregiem czasowym POS, co oznacza, że charakteryzuje się również prawie okresową funkcją autokowariancji. Założenie to jest konieczne w celu identyfikacji częstotliwości zbioru  $\Psi_p$  metodą podpróbki. Nie należy oceniać tego założenia jako nadmiernej restrykcyjności, ponieważ szereg ten powstał w wyniku zastosowania operatora różnicowania i operatora średniej ruchomej dla pierwotnych danych. Dodatkowo w wielu cytowanych wcześniej artykułach oraz monografiach dotyczących analizy wskaźników makroekonomicznych (patrz

---

<sup>10</sup>W literaturze dotyczącej analizy wahań aktywności gospodarczej znaleźć można również przykłady zastosowania szeregów Fouriera jako metody aproksymacji funkcji trendu. W monografii Milas i inni (2006) (Rozdział 9, str. 221-246) rozważono model ze zmiennym w czasie wyrazem wolnym, który aproksymowano przy zastosowaniu szeregów Fouriera. Podejście to jest jednak nieco inne od tego, gdzie analiza fourierowska jest stosowana w celu identyfikacji i estymacji parametrów mogących mieć wpływ na obraz wahań koniunkturalnych. Funkcja trendu nie podlega zaś estymacji, jak to miało miejsce w przypadku wyników zawartych w Milas i inni (2006).

dla przykładu: Parzen i Pagano (1979), Osborn i Smith (1989), Franses i Boswijk (1996), Franses (1996), Franses i Ooms (1997), Franses i Dijk (2005)) przyjmuje się nieco silniejsze założenia o okresowej strukturze funkcji autokowariancji.

W celu identyfikacji parametrów podlegających wnioskowaniu w zbiorze  $\Psi_{p,1}$  stosujemy statystykę testową  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{r}_n(\psi)|$  oraz odpowiadające wartości krytyczne  $\tilde{g}_{n,b}(0.99\%)$  dla szeregu  $\{X_t : t \in \mathbf{Z}\}$ . Przypomnijmy, że statystyka testowa  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\})$  może być identyfikowana z wartością statystyki testowej  $\Pi_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{m}_n(\psi)|$  opartej na próbie  $\{X_1 - \bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n\}$ , gdzie  $\bar{X}_n$  jest średnią z próby  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Wartość krytyczna jest obliczana jako

$$\tilde{g}_{n,b}^{(\psi)}(1-\alpha) = \inf \{x : \tilde{G}_{n,b}^{(\psi)}(x) \geq 1-\alpha\},$$

gdzie

$$\tilde{G}_{n,b}^{(\psi)}(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}\{\sqrt{b}(|\hat{r}_n^{t-1,b}(\psi)| - |\hat{r}_n(\psi)|) \leq x\}$$

oraz

$$\hat{r}_n^{t-1,b}(\psi) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{t+b-1} (X_j - \bar{X}_n) e^{-i\psi j}.$$

W analizach przyjmujemy, iż  $b = 2.5\sqrt{n}$ . Wartości statystyki testowej wraz z wartościami krytycznymi wyznaczamy dla częstotliwości  $\psi$  z dyskretnego zbioru<sup>11</sup> zawartego w przedziale  $(0,0.35)$ . Jeśli wartość statystyki testowej przekracza wartość krytyczną na pewnym przedziale  $I \subset (0,0.35)$ , wtedy zakładamy, że w przedziale tym zawarta jest częstotliwości ze zbioru  $\Psi_{p,1}$ . W kolejnym kroku dokonujemy estymacji nieznaney częstotliwości.

#### Etap 4. Wyodrębnienie cyklu filtrem Hodricka i Prescottta

W tym kroku dokonywany jest wybór parametru filtracji metodą Hodricka i Prescottta, tak aby poprawnie wyodrębnić wahania będące obiektem zainteresowania. Poprzez filtr HP będziemy rozumieć filtr (wyodrębniający wahania cykliczne) postaci:  $L(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k B^k = 1 - 1/(1 + \lambda(1-B)^2(1-B^{-1})^2)$ , gdzie filtr  $1-L(B)$  jest filtrem wyodrębniającym długookresową ścieżkę wzrostu lub spadku (trend).

W zastosowaniach empirycznych metody filtracji zaproponowanej przez Hodricka i Prescottta szczególnie ważnym jest właściwy dobór parametru wygładzającego  $\lambda$ . Zmiana parametru  $\lambda$  dla danych wpływa na gładkość wyodrębnionej linii trendu. Im większa

<sup>11</sup>Zbiór ten zostanie tak dobrany aby jego licznosc była kilkakrotnie większa od licznosci próby.

wartość parametru  $\lambda$ , tym gładzsza linia trendu, a przez to wyodrębnione wahania (będące różnicą pomiędzy danymi a wartościami z linii trendu) zawierają cykle o większej długości. Algorytm doboru parametru wygładzającego  $\lambda$  w zależności od długości cykli będących obiektem zainteresowania zaprezentowano w pracy Maravall i del Rio (2001). W pracy tej (str. 17 wzór 5.3) przytoczono formułę na wartość parametru  $\lambda$  jako funkcję częstotliwości  $\omega_0$  postaci

$$\lambda = [4(1 - \cos(\omega_0))^2]^{-1}. \quad (21)$$

Częstotliwość  $\omega_0$  można interpretować jako dolną granicę częstotliwości będących przedmiotem zainteresowania. Ustalenie  $\omega_0$ , które dotychczas w literaturze odbywało się arbitralnie, determinowało cechy morfologiczne uzyskanych estymatorów cyklu. Na mocy konstrukcji wartość parametru  $\lambda$  może być interpretowana jako wartość, dla której, po zastosowaniu filtra HP, wzmacnione zostaną wahania o korespondujących częstotliwościach powyżej wartości  $\omega_0$ , zaś osłabieniu wahań o korespondujących częstotliwościach poniżej wartości  $\omega_0$ . Taka interpretacja jest możliwa poprzez wykazanie, iż filtr HP można otrzymać jako szczególny przypadek filtra Butterwortha (patrz Gómez (1999), Gómez (2001)).

Proponowane w niniejszym opracowaniu podejście sprowadza się do zdeterminowania parametru wygładzania  $\lambda$  wartościami istotnych statystycznie częstotliwości zidentyfikowanych w Etapie 3. algorytmu. Parametr wygładzania dobieramy zatem tak, aby osłabić wahania nie będące efektem zmian koniunktury a jednocześnie wzmacnić te wahania, które utożsamiamy ze zmianami aktywności gospodarczej. Dobór parametru  $\lambda$  staje się w konsekwencji procedurą statystyczną, o własnościach asymptotycznych, zaś nie jest jak dotychczas czysto arbitralną decyzją.

Aby wyjaśnić powyższy mechanizm rozważymy przykład, w którym wyodrębniono wahania za pomocą filtra HP dla różnych wartości parametru  $\lambda$ .

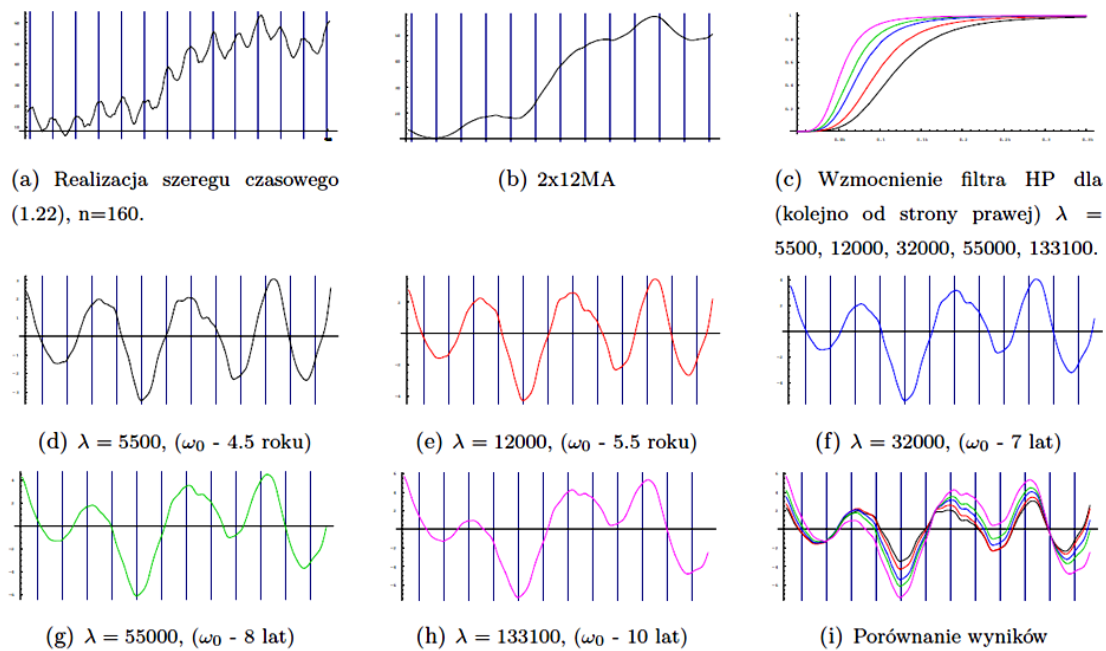
**Przykład 3.2** Rozważmy szereg czasowy  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  postaci

$$P_t = \cos(0.262t)/2 + 4\cos(0.15t) + 10\cos(0.06t) + 5\sin(2\pi/12) + \eta_t, \quad (22)$$

gdzie  $\eta_t = \eta_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\eta_0 = 0$  oraz  $\{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$  to biały szum gaussowski o średniej równej 0,6 oraz wariancji równej jeden.

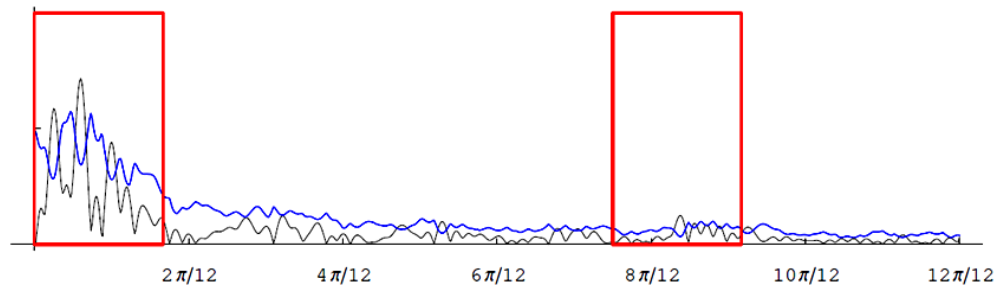
Dla danych miesięcznych częstotliwość 0.262 odpowiada za cykl dwuletni, częstotliwość 0.15 za cykl 3.5 letni, zaś częstotliwość 0.06 za cykl 8.7 roku. Korzystając z reprezentacji (12) można zapisać  $\{0.262, 0.15, 0.06\} \subset \Psi_{P,1}$  oraz  $2\pi/12 \in \Psi_{P,2}$ . Wyznaczono realizację o liczności  $n = 160$  z modelu (22), zastosowano filtr scentrowanej średniej ruchomej 2x12MA celem osłabienia wahań sezonowych oraz wyodrębniono wahania za pomocą filtra HP dla różnych parametrów wygładzania. Wyniki przedstawiono na rysunku 2.1.

**Rysunek 2.1. Działanie filtra HP dla różnych wartości parametru wygładzającego  $\lambda$  na realizację szeregu czasowego postaci (22) po zastosowaniu scentrowanej średniej ruchomej**



Zauważmy, że dla parametru  $\lambda = 5500, 12000, 32000$  (odpowiadającego zgodnie z formułą (21) cyklom o długości 4.5, 5.5 oraz 7 lat) wyodrębnione wahania cykliczne charakteryzują się cyklicznością o średniej długości cyklu 3-4 lata (patrz Rysunek 2.1. (d)-(f)). Analizując z kolei wahania wyodrębnione dla parametrów  $\lambda = 55000, 133100$  (odpowiadających zgodnie z formułą (21) cyklom 8 oraz 10-letnim) zauważyć można wyraźny wpływ częstotliwości 0.06 (korespondującej w równaniu 22 z cyklem 8.7 letnim) na obraz otrzymanych wahań. Dla tak dobranych parametrów wygładzania wahania o korespondującej długości 8.7 roku nie są bowiem skutecznie odseparowane ze względu na bliskość częstotliwości 0.06 z częstotliwością korespondującą z parametrem wygładzania  $\lambda$  oraz ze względu na dużą wartość amplitudy tych wahań (patrz równanie modelu (22)). Dlatego też filtr HP osłabił te wahania w mniejszym stopniu dla  $\lambda = 55000, 133100$  (tworząc cykl pozorny o przybliżonej długości 6-8 lat), niż dla parametrów  $\lambda = 5500, 12000, 32000$ . Rysunek 1. (c) przedstawia wielkość  $|L(e^{-i\psi})|$  (tzw. wzmocnienie filtra liniowego) istotną z punktu widzenia interpretacji amplitudy wyodrębnionych wahań.

**Rysunek 2.2. Identyfikacja istotnych wartości statystyki  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{r}_n(\psi)|$  dla realizacji procesu  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . – wartości statystyki testowej  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{r}_n(\psi)|$  dla  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k=1,2,\dots,720\}$ ; – wartości  $\tilde{g}_{n,b}^{(\psi)}(99\%)$  dla  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k=1,2,\dots,720\}$**



Rysunek 1.2: Identyfikacja istotnych wartości statystyki  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{r}_n(\psi)|$  dla realizacji procesu  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . — wartości statystyki testowej  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{r}_n(\psi)|$  dla  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k=1,2,\dots,720\}$ ; — wartości  $\tilde{g}_{n,b}^{(\psi)}(99\%)$  dla  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k=1,2,\dots,720\}$ . Źródło: Lenart (2010).

Źródło: Lenart (2010).

Analizując zidentyfikowane częstotliwości ze zbioru  $\Psi_{p,1}$  parametr  $\lambda$  dobieramy tak, aby częstotliwość wyznaczona według formuły (21) znajdowała się pomiędzy częstotliwościami utożsamianymi ze zmianami koniunktury a częstotliwościami utożsamianymi z długookresową tendencją do wzrostu. Brak informacji na temat istotnych częstotliwości zbioru  $\Psi_{p,1}$ , może prowadzić bowiem do błędnych wniosków. Ustalanie arbitralne parametru wygładzania może w istotny sposób (z punktu widzenia wyciąganych wniosków) zniekształcić obraz wahań cyklicznych utożsamianych ze zmianami aktywności gospodarczej.

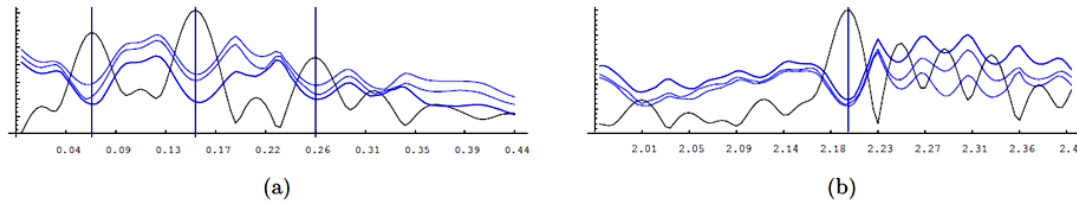
Aby zilustrować działanie Etapu 3. proponowanego algorytmu na rysunku przedstawiono wartości statystyki testowej  $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n} |\hat{r}_n(\psi)|$  oraz wartości  $\tilde{g}_{n,b}^{(\psi)}(99\%)$  dla  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k=1,2,\dots,720\}$  dla pierwszych różnic procesu scentrowanej średniej ruchomej indeksu produkcji w Polsce<sup>12</sup>.

Obszary, w których zidentyfikowano wartości statystyki testowej przekraczające wartości kwantyla próbkowego zaznaczono na rysunku 2.2. w postaci czerwonych prostokątów. Obszary te przedstawiono również na poniższym rysunku. Linie pionowe na rysunku 2.3. (a) reprezentują próbkowe wartości estymatora nieznanych częstotliwości ze zbioru  $\Psi_{1,p}$ . Wartości te zestawiono w poniższej tabeli.

<sup>12</sup>Indeks jednopodstawowy (2005=100%) w okresie od stycznia 1995 do grudnia 2009.



**Rysunek 2.3. Identyfikacja istotnych wartości statystyki testowej**



Rysunek 1.3: Identyfikacja istotnych wartości statystyki testowej  $\sqrt{n}|\hat{r}_n(\psi)|$  dla realizacji dyskretnego procesu  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ : (a) wartości statystyki testowej  $\hat{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n}|\hat{r}_n(\psi)|$  (linia czarna) oraz wartości  $\hat{g}_{n,b}^{(\psi)}(\alpha)$  (linie niebieskie) dla  $\alpha \in \{92\%, 95\%, 99\%$  oraz  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k = 1, 2, \dots, 100\}$ ; (b) wartości statystyki testowej  $\hat{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n}|\hat{r}_n(\psi)|$  (linia czarna) oraz wartości  $\hat{g}_{n,b}^{(\psi)}(\alpha)$  (linie niebieskie) dla  $\alpha \in \{92\%, 95\%, 99\%$  oraz  $\psi$  ze zbioru dyskretnego  $\{(k-1)\pi/720 : k = 450, 451, \dots, 550\}$ .

Źródło: Lenart (2010).

**Tabela 2.1. Wartości estymowanych częstotliwości wraz z korespondującą długością cyklu w latach dla indeksu produkcji przemysłowej w Polsce**

Estymowana wartość częstotliwości	$\hat{\psi}_{n,1} = 0.062$	$\hat{\psi}_{n,2} = 0.153$	$\hat{\psi}_{n,3} = 0.258$
Korespondująca długość cyklu (w latach)	8.5	3.4	2

Na podstawie otrzymanych wartości estymatorów nieznanych częstotliwości ze zbioru  $\Psi_{1,P}$  dobierany jest parametr filtru Hodricka i Prescottta. Dobór tego parametru opiera się zatem na podstawie wyników uzasadnionych z formalnego punktu widzenia. Pozwala to na uniknięcie zarzutu arbitralności w wyborze tego parametru. Na poniższym rysunku przedstawiono wyodrębnione w ten sposób wahania dla indeksu produkcji przemysłowej w Polsce<sup>13</sup>. Przyjęte parametry metody Hodricka i Prescottta równe:  $\lambda = 5500$ ,  $\lambda = 12000$ ,  $\lambda = 32000$ ,  $\lambda = 55000$  – co odpowiada osłabieniu wahań przekraczających długość (odpowiednio): 4.5 roku, 5.5 roku, 7 lat oraz 8 lat. Wybór takiego zestawu parametrów związany jest z brakiem zidentyfikowanych wahań w przedziale 4-8 lat.

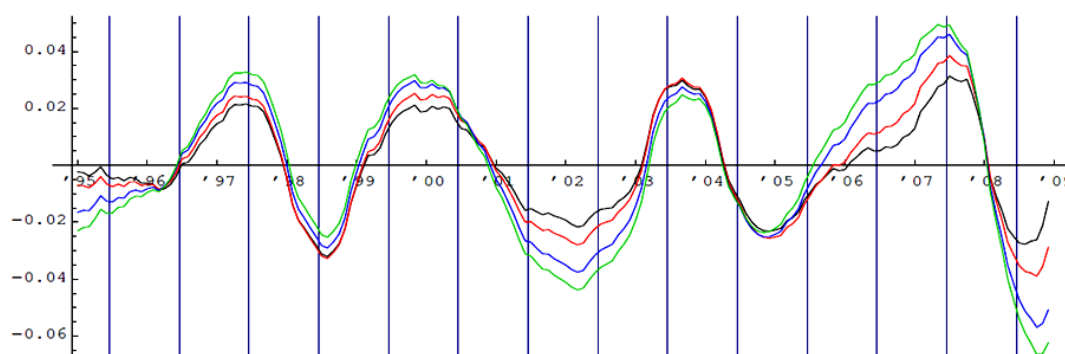
Bardziej szczegółowe omówienie metod estymacji amplitudy oraz fazy wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej (wraz z ich graficzną reprezentacją i interpretacją) można znaleźć w Lenart (2010).

Szczegółowa charakterystyka wahań aktywności gospodarczej Polski wydaje się jedynie wstępnym etapem w modelowaniu cykli koniunkturalnych. Naturalnie kolejnym etapem powinna być prognoza fazy cyklu koniunkturalnego na podstawie odpowiednio skonstruowanych modeli ekonometrycznych. Zagadnienie to jest jednak złożone ze względu na cechy fluktuacji koniunkturalnych. Nowatorska metodologia konstrukcji prognozy cyklu, poprzez zastosowanie podejścia bayesowskiego jest tematem następnej części raportu.

<sup>13</sup>Indeks jednopodstawowy (2005=100%) w okresie od stycznia 1995 do grudnia 2009, po zastosowaniu scentrowanej średniej ruchomej 2x12MA.

**Rysunek 2.4. Wyodrębniony proces ze średniej ruchomej logarytmu produkcji przemysłowej za pomocą filtra Hodricka i Prescottta dla**

$\lambda = 5500$ (liniaczarna),  $12000$ (liniaczerwona),  $32000$ (linianiebieska),  $55000$ (liniazielona)



## 2.2. WYKORZYSTANIE UJĘCIA BAYESOWSKIEGO W KRÓTKOOKRESOWYM PROGNOZOWANIU WSKAŹNIKÓW MAKROEKONOMICZNYCH

### 2.2.1. BAYESOWSKIE PROGNOZY WSKAŹNIKÓW MAKROEKONOMICZNYCH Z WYKORZYSTANIEM MODELI JEDNOWYMIAROWYCH

Proponowana metodologia otrzymywania krótkoterminowych prognoz podstawowych wskaźników mikroekonomicznych zakłada zastosowanie bayesowskiego ujęcia wnioskowania do podstawowych, parametrycznych modeli dla szeregów czasowych. Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego jest podyktowane dwoma podstawowymi względami. Po pierwsze, umożliwia w pełni formalne porównanie konkurencyjnych modeli oraz łączenie wiedzy. Problemy związane z wyborem modelu nie wymagają arbitralnych decyzji o wyborze jednej specyfikacji oraz odrzuceniu pozostałych, konkurencyjnych modeli. Ostateczne prognozy stanowią rezultat formalnego wnioskowania z wykorzystaniem wszystkich rozważanych modeli łącznie, przy czym niepewność związana z wyborem specyfikacji jest automatycznie odzwierciedlona w prognozach. Po drugie, wnioskowanie bayesowskie dostarcza użytecznego, formalnie podbudowanego i niearbitralnego opisu niepewności o prognozowanych wielkościach w postaci rozkładu predyktywnego. W przeciwieństwie do stosowanych w niektórych przypadkach procedur badania rozkładu błędów *ex post*, nie jest wymagane odwoływanie się do arbitralnych, przyjętych *ad hoc* metod. W modelu bayesowskim rozkład predyktywny jest wyznaczony w sposób jednoznaczny. W przypadku badania rozkładu błędów *ex post*, nawet przy ustalonej postaci

modelu próbkowego można rozważać różne typy rozkładów błędów, zaś otrzymane wyniki mogą być silnie wrażliwe na długość rozpatrywanego szeregu prognoz wygasłych.

Podstawowym narzędziem prognostycznym będą modele jednowymiarowe dla pojedynczych szeregów czasowych. Takie założenie wynika z ustalenia, iż głównym celem wnioskowania jest badanie przyszłych wartości wskaźników charakteryzujących stan gospodarki. Analiza przyszłych zależności pomiędzy nimi stanowi bardziej zaawansowany problem. W takim ujęciu ograniczenie się do modeli jednowymiarowych może być zasadne. Ze względu na fakt, iż podstawowym celem wnioskowania jest predykcja, zrezygnowano z uwzględnienia w analizie zmiennych egzogenicznych, gdyż wymagałoby to specyfikacji dodatkowego modelu, co prowadzi nieuchronnie do komplikacji zagadnienia.

Na użytek niniejszej analizy zakłada się, iż modelowaniu podlega zmienna  $y_t$ , reprezentująca przyrosty (lub logarytmiczne stopy zmian) rozważanego wskaźnika makroekonomicznego  $x_t$ . Przyjmuje się ponadto, iż dostępnych jest  $T$  obserwacji (realizacji zmiennych losowych) reprezentujących wartości  $y_t$  w kolejnych, równo odległych odstępach czasu (okresach). Wartości  $y_t$  w następnych  $H$  okresach są traktowane jako niedostępne i stanowią przedmiot wnioskowania statystycznego (predykcji).

Poniżej dla większej przejrzystości przyjęto notację rodzajową, w ramach której  $p(\cdot)$  reprezentuje funkcje gęstości absolutnie ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa, przy czym identyfikacja rozkładów różnych zmiennych wynika z kontekstu oraz oznaczenia przyjętego dla argumentów funkcji  $p(\cdot)$ . Podobnie, wektor wszystkich parametrów w przypadku różnych modeli próbkowych jest oznaczony przez  $\theta$ , bez subskryptu identyfikującego model. Dla uproszczenia notacji przyjęto również, iż ciąg zmiennych losowych  $\{y_t\}$  (proces stochastyczny z czasem dyskretnym) może być reprezentowany poprzez pojedynczy, typowy element  $y_t$ .

Każdy z konkurencyjnych modeli próbkowych odpowiada rodzinie  $T$ -wymiarowych rozkładów wektora losowego  $\mathbf{y}$ , grupującego dostępne obserwacje, parametryzowanej skończone wymiarowym wektorem parametrów  $\theta \in \Theta$ . Zakłada się, iż przyjęta postać modelu próbkowego określa także postać warunkowego (przy ustalonej przeszłości procesu obserwowalnego oraz ustalonych wartościach parametrów) rozkładu wektora  $\mathbf{y}^f$  grupującego  $H$  obserwacji niedostępnych i stanowiących przedmiot wnioskowania statystycznego.

Model bayesowski reprezentuje łączny rozkład parametrów  $\theta$ , obserwacji dostępnych  $\mathbf{y}$ , oraz obserwacji niedostępnych  $\mathbf{y}^f$ , któremu odpowiada funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $p(\mathbf{y}^f, \mathbf{y}, \theta)$ . Należy tu zastrzec, iż elementami wektora  $\theta$  mogą być obserwacje niedostępne nie stanowiące przedmiotu wnioskowania (reprezentujące, np. nieznanne warunki początkowe procesu dynamicznego), a także zmienne ukryte.

Na użytek specyfikacji modelu bayesowskiego rozważa się następującą dekompozycję:

$$p(\mathbf{y}^f, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}),$$

gdzie:  $p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  reprezentuje teorio-próbkowy rozkład predykcyjny,  $p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$  odpowiada modelowi próbkowemu, zaś  $p(\boldsymbol{\theta})$  reprezentuje tzw. rozkład *a priori*. Dwa pierwsze elementy są wykorzystywane we wnioskowaniu niebayesowskim i mogą być specyfikowane poprzez określenie postaci równania obserwacji. Rozkład *a priori*  $p(\boldsymbol{\theta})$  odzwierciedla przyjęte we wnioskowaniu bayesowskim założenie o losowości parametrów i na mocy konstrukcji stanowi brzegowy (względem obserwacji) rozkład nieznanymi parametrów. Niepewność dotycząca możliwych wartości parametrów (przed wglądem w dane) jest tu formalnie, probabilistycznie reprezentowana. Specyfikacja konkretnej postaci  $p(\boldsymbol{\theta})$  w praktyce badań naukowych najczęściej odwołuje się do idei (formalnego lub tylko przybliżonego) odzwierciedlenia braku wstępnej wiedzy o parametrach modelu. Powyższy zapis wymaga oczywiście określenia przestrzeni, w których przyjmują wartości parametry oraz obserwacje.

Wnioskowanie statystyczne jest możliwe zgodnie z następującą dekompozycją łącznego rozkładu obserwacji i parametrów:

$$p(\mathbf{y}^f, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})p(\mathbf{y}).$$

Odzwierciedla to podstawową ideę wnioskowania bayesowskiego, jaką jest warunkowanie względem wielkości obserwowalnych ( $\mathbf{y}$ ). Rozkład  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  nazywany jest rozkładem *a posteriori*. Reprezentuje on wiedzę o parametrach modelu po wglądzie w dane. W ramach wnioskowania bayesowskiego wstępna wiedza parametrach, reprezentowana przez rozkład *a priori*, pod wpływem obserwacji ulega modyfikacji do postaci rozkładu *a posteriori*. Rozbieżności pomiędzy rozkładami *a priori* i *a posteriori* odzwierciedlają wpływ zaobserwowania danych  $\mathbf{y}$  na wiedzę o nieznanymi parametrach  $\boldsymbol{\theta}$ .

Jeśli funkcję wiarygodności, która co do postaci analitycznej tożsama jest z  $p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$ , oznaczymy przez  $L_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})$ , jądro rozkładu *a posteriori* możemy otrzymać jako:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto L_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}).$$

Jeśli celem wnioskowania jest wyłącznie predykcja, rozpatruje się rozkład predykcyjny o postaci:

$$p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y}) = \int_{\boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})d\boldsymbol{\theta}.$$

We wzorze powyżej, z łącznego rozkładu wielkości nieznanymi, tj. obserwacji niedostępnych i parametrów, warunkowanego wielkościami znanymi, tj. dostępnymi obserwacjami, parametry  $\boldsymbol{\theta}$  zostały wyciąkowane. Odpowiada to idei wnioskowania bayesowskiego, polegającej na ubzegowaniu względem wielkości nieznanymi, które nie są przedmiotem zainteresowania badacza. W tym przypadku oznacza to, iż całą niepewność

związana z wnioskowaniem o nieznanymi parametrach została formalnie uwzględniona w prognozie. Rozkład predykcyjny może być interpretowany w ten sposób, iż rozkład obserwacji niedostępnych uzyskuje się jako mieszaną teoriopróbkowych rozkładów predykcyjnych (warunkowych względem  $\theta$ ), mieszanych według rozkładu *a posteriori* parametrów  $\theta$ . W takim ujęciu rozkład predykcyjny  $p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y})$  reprezentuje zarówno niepewność związana ze stochastycznym mechanizmem generującym obserwacje, jak i niepewność obarczającą wnioskowanie o nieznanymi parametrach modelu.

W przypadku podstawowego modelu przyjętego w niniejszym badaniu równanie obserwacji definiujące model próbkowy ma następującą strukturę:

$$y_t = g(t; \gamma) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^J \eta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^K \psi_k \zeta_{t-k} + \zeta_t,$$

$$\zeta_t | \theta : iin(0, \tau^{-1}).$$

Oznacza to, iż przyjęto, że kształtowanie się stóp zmian (przyrostów) rozważanego wskaźnika opisywane jest poprzez funkcję  $g(t; \gamma)$ , odzwierciedlającą przeciętny poziom zmian  $x_t$ , wraz z jego ewentualnymi systematycznymi (np. sezonowymi) wahaniami, oraz proces odchyłeń  $\varepsilon_t$ . Ten ostatni zdefiniowany jest przez rozkłady warunkowe (w sensie warunkowania względem ustalonych parametrów oraz przeszłości procesu). Ich struktura odpowiada stacjonarnemu i kauzalnemu gaussowskiemu modelowi autoregresyjnego średnich ruchomych  $ARMA(J, K)$  (z odwracalną częścią  $MA$ ) oraz ścisłym białym szumem  $\zeta_t$  o precyzji  $\tau$  (zob. Brockwell i Davis (1986), Gelfand i inni (1995)). Rozkład wektorów:  $\mathbf{y}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jest oczywiście określony na  $\mathbb{R}^T$ . Proces odchyłeń  $\varepsilon_t$ , ściśle rzecz biorąc, nie musi być procesem stacjonarnym. Wynika to z przyjętego powyżej założenia o ograniczonej z dołu dziedzinie czasu.

W takim przypadku niezbędna jest specyfikacja założeń dotyczących warunków początkowych procesu obserwowalnego oraz białego szumu (oznaczymy je, odpowiednio, przez  $\mathbf{y}^{(0)}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ ). Tutaj zakłada się, iż warunki początkowe są nieznanymi, a zatem muszą być reprezentowane przez zmienne ukryte. Zakłada się też, że są one stochastycznie niezależne od przyszłości białego szumu  $\zeta_t$ , jednakże nie przyjmuje się dla nich rozkładów wynikających z rozpatrywania stacjonarnego procesu  $ARMA$  w dziedzinie całkowitej (dla indeksu obserwacji). Z punktu widzenia wnioskowania bayesowskiego warunki początkowe mogą być więc traktowane analogicznie jak inne parametry modelu.

Przyjęcie rozkładów warunków początkowych, które nie odzwierciedlają pełnej jednorodności w czasie procesu  $\varepsilon_t$  pozwala na pewne osłabienie założeń dotyczących stabilności strukturalnej rozważanego mechanizmu generowania danych. Przykładowo, skutek oddziaływania zwiększonej zmienności  $x_t$  w czasie poprzedzającym okres poddany analizie może być uwidoczniony w początkowej sekwencji modelowanych obserwacji poprzez (wygasający) wpływ warunków początkowych.

Przyjęty model dla procesu  $\varepsilon_t$  implikuje przynajmniej jego asymptotyczna stacjonarność (w tym sensie, iż ze wzrostem  $t$ , rozkład  $\varepsilon_t$  jest zbieżny do rozkładu stacjonarnego procesu *ARMA* o zerowej bezwarunkowej wartości oczekiwanej). Ze względu na założenie o gaussowskim rozkładzie składników losowych  $\zeta_t$ , w rozważanym przypadku (dla procesu *ARMA* z czasem w dziedzinie całkowitej) ścisła stacjonarność jest równoważna stacjonarności kowariancyjnej.

Stacjonarność samego procesu  $y_t$  zależy od postaci funkcji  $g(t; \gamma)$ , która definiuje zasadniczy komponent próbkowej wartości oczekiwanej  $y_t$ . Wartość oczekiwana  $y_t$  zależy również od wartości oczekiwanej  $\varepsilon_t$ , która może być niezerowa ze względu na oddziaływanie warunków początkowych. Jak wyżej wspomniano, ze wzrostem  $t$  wartość oczekiwana  $\varepsilon_t$  dąży do zera, wobec czego próbkowa wartość oczekiwana obserwowanego procesu jest dominowana przez postać  $g(t; \gamma)$ . Mowa tu o bezwarunkowej, próbkowej wartości oczekiwanej  $y_t$  w tym sensie, iż przy ustalonym i znanym  $t$  oraz przy ustalonych parametrach modelu nie jest rozważane warunkowanie uprzednimi realizacjami procesu  $y_t$  (tj. realizacjami do chwili o indeksie  $t-1$  włącznie). Tak rozumiana bezwarunkowa, próbkowa wartość oczekiwana  $y_t$  ze wzrostem  $t$  jest zbieżna do  $g(t; \gamma)$ .

Jeśli funkcja  $g(t; \gamma)$  nie jest stała względem  $t$ , jest możliwe, iż model próbkowy dla obserwowanego procesu nie będzie się charakteryzował nawet asymptotyczną stacjonarnością. Będzie to jednak związane wyłącznie z możliwymi wahaniami wzmiankowanej wartości oczekiwanej; bezwarunkowa wariancja w takim modelu nie może rosnąć nieograniczenie. W tym sensie generowana niestacjonarność w próbkowym rozkładzie  $y_t$  ma odmienny charakter od niestacjonarności powodowanej przez pierwiastki jednostkowe w procesie typu *ARMA*, związane z pojęciem integracji  $I(1)$ . W przypadku zdefiniowania  $y_t$  jako przyrostów  $x_t$ , rozważany model dopuszcza *de facto* pewne uogólnienie własności  $I(1)$  w stosunku do implikowanego procesu opisującego kształtowanie się podstawowego wskaźnika makroekonomicznego  $x_t$ .

Zgodnie z przyjętymi powyżej założeniami wektor wszystkich parametrów modelu ma więc postać:  $\theta' = (\gamma', \eta', \psi', \tau, \mathbf{y}^{(0)'}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)'})$ . Warunki początkowe zostały wcześniej zdefiniowane jako zmienne ukryte, jednak z formalnego punktu widzenia w analizie bayesowskiej są one traktowane analogicznie jak parametry. Zakładamy tu ustaloną postać

$g(t; \gamma)$  oraz wartości  $J$  oraz  $K$ . Ze względu na różne możliwości specyfikacji  $g(t; \gamma)$  oraz wybór wartości  $J$  oraz  $K$  niezbędne jest przeprowadzenie formalnego porównywanie modeli.

W pierwszym etapie analizy zakładamy, iż funkcja  $g(t; \gamma)$  dla kolejnych  $t$  przyjmuje kolejno powtarzającą się sekwencję  $S$  stałych wartości ( $s = 1, 2, \dots, S$ ). Dla  $S = 1$  mamy do czynienia z funkcją stałą względem  $t$ . Dla  $S = 12$  funkcja  $g(t; \gamma)$  w przypadku rozpatrywania danych miesięcznych przyjmuje każdorazowo tę samą wartość  $\gamma_s$  w tym samym miesiącu kalendarzowym. Ponieważ modelowaniu podlegają przyrosty wartości wskaźników makroekonomicznych, nie zachodzi konieczność rozpatrywania dla  $g(t; \gamma)$  postaci trendów wielomianowych. Ostatecznie więc wektor  $\gamma$  obejmuje  $S$  nieznanymi parametrów. Zakłada się wobec tego, iż  $\gamma \in \mathbb{R}^S$ .

Wektory  $\eta$  oraz  $\psi$  reprezentują parametry części  $ARMA(J, K)$ . Warunki kauzalności i odwracalności sprawiają, iż wektory te należą do zbiorów o raczej skomplikowanym kształcie w ogólnym przypadku. Omawiane warunki implikują  $\eta \in \mathbf{H}_J$  oraz  $\psi \in \Psi_K$ , a także  $\mathbf{H}_J \subset \mathbb{R}^J$  oraz  $\mathbf{H}_J = \Psi_J$ . Pomiędzy wektorami  $\eta$  oraz  $\psi$  zachodzi swobodna zmienność (tj.  $(\eta', \psi') \in \mathbf{H}_J \times \Psi_K$ ).

Warunki początkowe spełniają  $\mathbf{y}^{(0)}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  przyjmują wartości w  $\mathbb{R}^J$  oraz  $\mathbb{R}^K$ . Przyjmuje się, że zarówno  $\mathbf{y}^{(0)}$ , jak  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  są to wektory losowe utworzone ze zmiennych o identycznych, niezależnych rozkładach typu  $t$  Studenta o liczbie stopni swobody większej od 2. Oczywiście parametry rozkładu typowego elementu  $\mathbf{y}^{(0)}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  są inne. Założenie o identyczności i niezależności omawianych rozkładów podyktowane jest dążeniem do uproszczenia struktury modelowej.

Proponowana struktura rozkładów *a priori* w omawianym modelu jest następująca (poniżej warunki początkowe będą traktowane tak samo jak pozostałe parametry):

$$p(\boldsymbol{\theta}) = p(\gamma) p(\eta) p(\psi) p(\tau) p(\mathbf{y}^{(0)}) p(\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}).$$

Wszystkie powyższe rozkłady są rozkładami właściwymi, pomiędzy grupami parametrów zachodzi niezależność *a priori*. Dla parametrów  $\gamma$  przyjęto *a priori* wielowymiarowy rozkład normalny. Dla parametrów  $\eta$  oraz  $\psi$  przyjęto rozkłady jednostajne na  $\mathbf{H}_J$  oraz  $\Psi_K$  (można pokazać, że są to rozkłady właściwe). Dla parametru precyzji  $\tau$  przyjęto *a priori* rozkład gamma, zaś warunki początkowe  $\mathbf{y}^{(0)}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  mogą być traktowane jak parametry, dla których *a priori* przyjęto identyczne, niezależne rozkłady  $t$  Studenta.

Przyjęcie takiej struktury *a priori* ma istotne zalety. Po pierwsze, pozwala zapewnić koherencję struktury *a priori*, co jest istotne ze względu na konieczność porównywania modeli. Rozkłady jednostajne dla  $\eta$  oraz  $\psi$ , wielowymiarowy rozkład normalny dla  $\gamma$  oraz

rozkłady z niezależnością  $\mathbf{y}^{(0)}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  pozwalają co do zasady na spełnienie postulatu koherencji przy porównaniach modeli różniących się wartościami  $J, K$  oraz  $S$ . Po drugie, ponieważ wszystkie rozkłady *a priori* są rozkładami właściwymi, w celu porównywania modeli może zostać wykorzystany estymator Newtona i Raftery'ego (zob. Raftery i inni (2007) oraz odwołania tam cytowane). Niestety, nie można pokazać, aby taka struktura rozkładów *a priori* spełniała formalne warunki nieinformacyjności (wyprowadzone np. z reguły Jeffreysa). W przypadku parametrów struktury *ARMA* zastosowane tu rozwiązanie (rozkład jednostajny) jest prawdopodobnie mniej arbitralne niż często przyjmowany w zastosowaniach wielowymiarowy rozkład normalny ucięty restrykcją kauzalności lub odwracalności. Przyjęcie rozkładu gaussowskiego w sytuacji gdy kształt zbiorów  $\mathbf{H}_J$  oraz  $\boldsymbol{\Psi}_K$  jest dość skomplikowany nie pozwala na łatwe kontrolowanie przyjmowanych założeń. Niektóre obszary przestrzeni parametrów mogą w ten sposób być *a priori* silnie preferowane lub silnie depreferowane w czysto przypadkowy sposób.

Można pokazać, iż w przypadku przyjęcia założeń opisanego tu modelu bayesowskiego, badanie rozkładu *a posteriori* może być przeprowadzone metodami *MCMC* (zob. Tierney (1994), Robert i Casella (2004)). Niestety, ze względu na restrykcje kauzalności oraz odwracalności (i przyjętą strukturę *a priori*) nie jest możliwe znalezienie pełnego rozkładu warunkowego *a posteriori* dla parametrów  $\boldsymbol{\eta}$  oraz  $\boldsymbol{\psi}$  o standardowej, umożliwiającej łatwe losowanie postaci. Wobec tego proponuje się wykorzystanie algorytmu hybrydowego w postaci próbnika Gibbsa wykorzystującego algorytm Metropolisa we wspólnym kroku dla wektora  $(\boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\psi}', \mathbf{y}^{(0)'}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)'})$ . Skomplikowana postać zbiorów  $\mathbf{H}_J$  oraz  $\boldsymbol{\Psi}_K$  sugeruje jednak wykorzystanie reparametryzacji odwołującej się do wzajemnie jednoznacznego odwzorowania  $\mathbf{H}_i \rightarrow \mathbb{R}^i$  (zob. Gelfand i inni (1995) i odwołania tam cytowane). Reparametryzacja taka dopuszcza na użytek estymacji zastąpienie parametrów  $\boldsymbol{\eta}$  i  $\boldsymbol{\psi}$  ich odpowiednikami  $\square_{\boldsymbol{\eta}}$  i  $\square_{\boldsymbol{\psi}}$ . Pozwala to na przyjęcie, iż dziedzina wektora  $\left( \begin{matrix} \square_{\boldsymbol{\eta}} \\ \square_{\boldsymbol{\psi}} \\ \mathbf{y}^{(0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \end{matrix} \right)$  jest  $\mathbb{R}^{2J+2K}$  i wykorzystanie w kroku próbnika Gibbsa algorytmu

Metropolisa w wersji *random walk*. Wykorzystanie takiej reparametryzacji może być niezbędne w przypadku badania modeli charakteryzujących się znaczną liczbą opóźnień w strukturze *ARMA*. Prowadzenie losowania (z rozkładu proponującego w algorytmie Metropolisa) z odrzucaniem wartości, które nie spełniają restrykcji kauzalności lub odwracalności może być w takim przypadku skrajnie nieefektywne.

Krok algorytmu Gibbsa związany z parametrem  $\tau$  może być zrealizowany na wiele sposobów. Skalarny wymiar parametru przesądza tu o łatwości losowania. Dla parametrów  $\boldsymbol{\gamma}$  pełny rozkład warunkowy jest wielowymiarowym rozkładem normalnym, co sprawia, iż ostatni w cyklu Gibbsa krok ma dogodny do realizacji charakter.



Wykorzystanie hybrydowego próbnika Gibbsa pozwala otrzymać (zależną) próbę z rozkładu  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . Ogólnie rzecz biorąc, procedury typu *MCMC* generują skorelowaną próbę z rozkładu *a posteriori*. Narzędziem symulacji typu *MCMC* jest łańcuch Markowa o nieprzeliczalnej liczbie stanów, którego rozkładem stacjonarnym jest rozkład  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . W związku z asymptotycznym (względem liczby iteracji algorytmu) charakterem zbieżności oraz potencjalnie silną korelacją próbnika, niezbędne jest generowanie prób pseudolosowych o znacznej liczności, a także monitorowanie (przynajmniej przybliżone) zbieżności wykorzystywanego łańcucha.

Ze względu na standardową postać  $p(\mathbf{y}^f|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta})$  uzyskanie próby z rozkładu predyktywnego  $p(\mathbf{y}^f|\mathbf{y})$  jest stosunkowo łatwe. Dla wylosowanej z rozkładu *a posteriori* realizacji wektora parametrów  $\boldsymbol{\theta}$ , oznaczonej przez  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ , próbę z  $p(\mathbf{y}^f|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)})$  otrzymuje się przez bezpośrednie losowanie z wykorzystaniem typowych procedur.

Dysponując próbą z rozkładu predyktywnego  $p(\mathbf{y}^f|\mathbf{y})$  można oszacować prawdopodobieństwa *a posteriori* zdarzeń odwołujących się w definicji do przyszłych wartości rozpatrywanego wskaźnika. Diagnoza stanu gospodarki może więc zależeć od wartości prawdopodobieństw *a posteriori* uzyskanych dla określonych konfiguracji przyszłych wartości badanej zmiennej. Możliwe jest również przedstawienie niepewności co do kształtowania się przyszłych wartości modelowanego procesu, tj. wielkości  $y_{T+h}$  lub  $x_{T+h}$  (dla  $h=1,2,\dots,H$ ), z wykorzystaniem, np. wykresu wachlarzowego.

### 2.2.2. BAYESOWSKA PROGNOZA KONIUNKTURY NA PODSTAWIE MODELU Z WAHANIAMI CYKLICZNYMI

Model zaproponowany w poprzednim podrozdziale został zbudowany z założeniem, iż struktura funkcji  $g(t;\boldsymbol{\gamma})$  odzwierciedla sezonowość występująca w przyrostach rozważanego wskaźnika makroekonomicznego. Możliwe jest rozszerzenie tej koncepcji przez odwołanie się do analogii z ideą procesów *POS* omawianą w niniejszym opracowaniu. Odpowiada to redefinicji równania obserwacji rozpatrywanego modelu do postaci:

$$y_t = d(t; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$d(t; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma}) = g(t; \boldsymbol{\gamma}) + \sum_{f=1}^F \alpha_f \sin(t\varphi_f) + \sum_{f=1}^F \beta_f \cos(t\varphi_f),$$

gdzie przyjmuje się, iż  $\boldsymbol{\delta} = (\varphi_1, \dots, \varphi_F)$  oraz  $\boldsymbol{\gamma} \in \Phi \subset \langle 0, \pi \rangle^F$ , zaś wartość  $F$  jest skończona (w praktyce raczej niewielka). Dla funkcji  $g(t; \boldsymbol{\gamma})$  przyjęto omawianą w poprzednim paragrafie

specyfikację, w ramach której wartość  $g(t; \gamma)$  jest reprezentowana przez parametry  $\gamma_s$  należące do  $S$ -elementowej, powtarzającej się w czasie sekwencji. Ponadto przyjmuje się:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_F)'$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_F)'$ . Wektor  $\delta$  grupuje parametry, względem których funkcja  $d(t; \cdot)$  jest liniowa:  $\delta' = (\alpha', \beta', \gamma')$ . Przyjmuje się ponadto, iż  $\delta \in \mathbb{R}^{2F+S}$ . Rozbudowany w ten sposób model pozwala na reprezentowanie bardziej złożonej struktury cyklicznej w bezwarunkowej, próbkowej wartości oczekiwanej  $y_t$ . Jeśli przyjmiemy  $S=1$  oraz  $y_t = \Delta x_t$ , różnica  $d(t; \delta, \cdot) - g(t; \gamma)$  może reprezentować cykliczne odchylenia od trendu liniowego w bezwarunkowej, próbkowej wartości oczekiwanej  $x_t$  (dla uproszczenia pominięto tu wygasający w czasie wpływ warunków początkowych, przyjęto też pewne słabe założenia techniczne zapewniające istnienie rozważanych wartości oczekiwanych).

Wnioskowanie bayesowskie w takim modelu wymaga uzupełnienia opisanej w poprzednim podrozdziale struktury rozkładów *a priori*. W niniejszej pracy proponuje się przyjęcie dla wektora parametrów  $\delta$  wielowymiarowego rozkładu normalnego, zaś dla wektora  $\varphi_f$  rozkładu jednostajnego na  $\Phi$  (który ze względu na przyjęte wyżej założenia jest rozkładem właściwym). Odrębna kwestia jest ustalenie dopuszczalnego zakresu wartości dla parametrów  $\varphi_f$ . Dopuszczenie wartości zbyt bliskich zeru mogłoby odpowiadać dopuszczeniu składowych dynamiki cyklicznej o okresie krótszym niż długość wektora dostępnych obserwacji. Wydaje się rozsądne ograniczenie dziedziny parametrów  $\varphi_f$  z dołu np. przez  $k2\pi/T$ , dla  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Ponadto możliwe jest wyrażenie wiedzy *a priori* o zakładanej strukturze modelowanego procesu dynamicznego przez dalsze ograniczenie dziedziny  $\varphi_f$  do pewnych podprzedziałów zakresu  $\langle 0, \pi \rangle$ . Zachowanie spójności metodologicznej wnioskowania bayesowskiego wymaga jednak, aby dziedzinę, w której rozkład *a priori* wektora przyjmuje dodatnia gęstość określić przed wglądem w dane.

Dodatkowo pewne względy o charakterze metodologicznym mogą uzasadniać narzucenie restrykcji *a priori* na łączną przestrzeń parametrów  $\delta$  oraz  $\varphi$ . Może to być podyktowane dążeniem do zapewnienia identyfikowalności. Przyjęta powyżej definicja funkcji  $d(t; \delta, \varphi)$  dopuszcza bowiem dla  $F > 1$  istnienie wielu równoważnych obserwacyjnie (w sensie modelu próbkowego) kombinacji wartości parametrów. Z punktu widzenia poprawności bayesowskiej metodologii konstrukcji prognozy względ taki nie ma charakteru zasadniczego. Zapewnienie identyfikowalności może być jednak podyktowane dążeniem do czytelnego reprezentowania wiedzy *a posteriori* o parametrach modelu. Brak identyfikowalności może bowiem prowadzić do uzyskania rozkładu *a posteriori* o bardzo skomplikowanym kształcie. W takim przypadku opis informacji *a posteriori* dotyczącej elementów wektora  $\theta$  poprzez tradycyjnie stosowane charakterystyki (takie jak momenty centralne) może być dalece niezadowolający.

Próbkowanie z rozkładu *a posteriori* w takim przypadku może się również odwoływać do hybrydowego algorytmu Gibbsa. Opisany w poprzednim podrozdziale schemat losowania wymaga tu pewnych modyfikacji. Pierwsza z nich sprowadza się do zastąpienia wektora

gamma całym wektorem  $\delta$  (struktura pełnego rozkładu warunkowego *a posteriori* jest w tym przypadku analogiczna). Druga różnica ma charakter bardziej podstawowy, estymacja wektora  $\varphi$  wymaga dodatkowego kroku w cyklu Gibbsa. Pełny rozkład warunkowy *a posteriori* dla wektora  $\varphi$  ma niestandardowy charakter, próbkowanie z niego wymaga więc kroku realizowanego z odwołaniem się do algorytmu Metropolisia w wersji *independence chain* lub *random walk*. W tym ostatnim przypadku dogodne może być odwołanie się do reparametryzacji wektora  $\varphi$ , która pozwalałaby na przeszukiwanie dziedziny o postaci  $\mathbb{R}^F$ .

Co do zasady możliwe jest również wykorzystanie wersji algorytmu Metropolisia dla wszystkich parametrów modelu łącznie. Wydaje się jednak, iż w przypadku rozpatrywania większych wartości  $J, K, S$  oraz  $F$ , takie rozwiązanie mogłoby się charakteryzować ograniczoną przydatnością. Wymiar łącznej przestrzeni parametrów w rozważanym przypadku to  $S + 3F + 2J + 2K + 1$ . W przypadku danych o częstotliwości miesięcznej trudno wykluczać wartości  $J, K$  bliskie 12, podobny argument może dotyczyć wartości  $S$ , która może być do pewnego stopnia zastąpiona przez dopuszczenie  $F > 1$ .

Stosowanie algorytmów *MCMC* do próbkowania z rozkładu *a posteriori* modelu omawianego w niniejszym podrozdziale wymaga jednak szczególnej staranności. Łączny rozkład *a posteriori* może mieć skomplikowaną, wielomodalną strukturę. Z kolei algorytmy takie jak próbnik Gibbsa mogą charakteryzować się trudnościami w eksploracji silnie wielomodalnych rozkładów. Uzyskanie praktycznie użytecznego łańcucha Markowa może więc wymagać w każdym przypadku dość szczegółowych badań.

Przyjmuje się, iż struktura analogiczna do opisanego powyżej równania obserwacji określa postać  $H$ -wymiarowego, teorio-próbkowego rozkładu predyktywnym  $p(\mathbf{y}^f | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ . Próbkowanie z bayesowskiego rozkładu predyktywnego odbywa się za pomocą bezpośredniego losowania wykorzystującego próbkę z rozkładu *a posteriori*. Pozwala to na otrzymanie rozkładu predyktywnego dla  $y_t$  lub  $x_t$  ( $t = T + 1, \dots, T + H$ ) oraz jego charakteryzację z wykorzystaniem technik wskazanych w poprzednim podrozdziale.

Przyjmując opisaną wyżej specyfikację  $g(t; \gamma)$ , można rozważać rozkład *a posteriori*  $T + H$ -wymiarowego wektora funkcji parametrów modelu oznaczonego  $\mathbf{c}(\delta, \varphi)$ , o typowym elemencie w postaci:

$$c_t(\delta, \varphi) = d(t; \delta, \varphi) - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \gamma_s.$$

Rozkład *a posteriori* takiej wielkości może reprezentować wiedzę o cyklicznym komponencie implikowanego przez rozważany model rozkładu  $y_t$  (w tym także rozkładu predyktywnego). Jest kwestia do rozważenia w jakim stopniu predykcje dla takiej funkcji parametrów można utożsamiać z prognozą komponentów reprezentujących cykl koniunkturalny. Postać  $\mathbf{c}(\delta, \varphi)$  oraz  $d(t; \delta, \varphi)$  może wymagać modyfikacji w zależności od własności empirycznych oraz teoretycznych rozważanego szeregu czasowego. Wydaje się

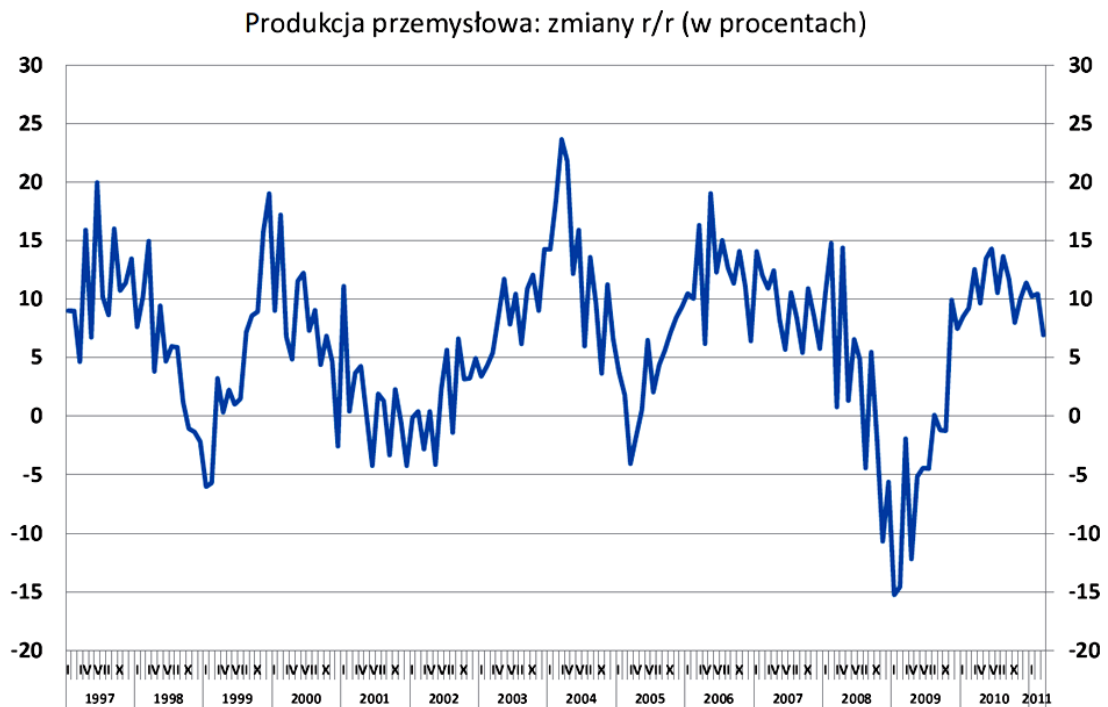
jednak, że analiza rozkładu *a posteriori* funkcji  $c(\delta, \varphi)$  (lub funkcji o zbliżonej konstrukcji) może dostarczyć istotnych informacji związanych z potencjalnym cyklicznym charakterem przyszłych wartości badanego szeregu czasowego. Wiedzę o  $c(\delta, \varphi)$  (zwłaszcza w okresie predykcji) można reprezentować poprzez charakterystyki punktowe (wartość oczekiwana, kwantyle) lub poprzez wykres wachlarzowy utworzony z brzegowych rozkładów *a posteriori*  $c_t(\delta, \varphi)$ . Możliwa jest także analiza dekompozycji przyszłych wartości na składowe:  $d(t; \delta, \varphi)$  oraz  $\varepsilon_t$ , wraz z badaniem zależności pomiędzy nimi.

Wnioskowanie bayesowskie pozwala w formalnie podbudowany sposób badać niepewność *a posteriori* obciążająca wnioskowanie o komponencie cyklicznym. Oczywiście możliwe jest również badanie prawdopodobieństw *a posteriori* konkretnych zdarzeń zdefiniowanych z odwołaniem się czy to do przyszłych wartości rozważanej zmiennej  $x_t$ , czy to tak lub inaczej zdefiniowanego komponentu cyklicznego. Identyfikacja komponentu cyklicznego w każdym konkretnym przypadku i zaproponowanie jego dekompozycji na elementy zmienności sezonowej oraz wahania koniunkturalne muszą być dokonywane indywidualnie, z uwzględnieniem charakteru rozważanego szeregu i w kontekście wiedzy ekonomicznej.

Dla ilustracji prezentowanej tu metodologii poniżej przedstawiony zostanie przykład analizy rocznej dynamiki produkcji przemysłowej (z wykorzystaniem danych miesięcznych GUS). Analiza makroekonomicznych szeregów czasowych o częstotliwości miesięcznej pozwala zminimalizować opóźnienia związane z publikacją danych. Jest to szczególnie istotne dla monitorowania bieżącej sytuacji gospodarczej pod kątem możliwości i celowości podjęcia działań interwencyjnych.

Rysunek 2.5. przedstawia procentowe zmiany w ujęciu rocznym (tj. w odniesieniu do tego samego miesiąca roku ubiegłego) produkcji przemysłowej w okresie od stycznia 1997 do marca 2011 (liczba obserwacji  $T = 171$ ).

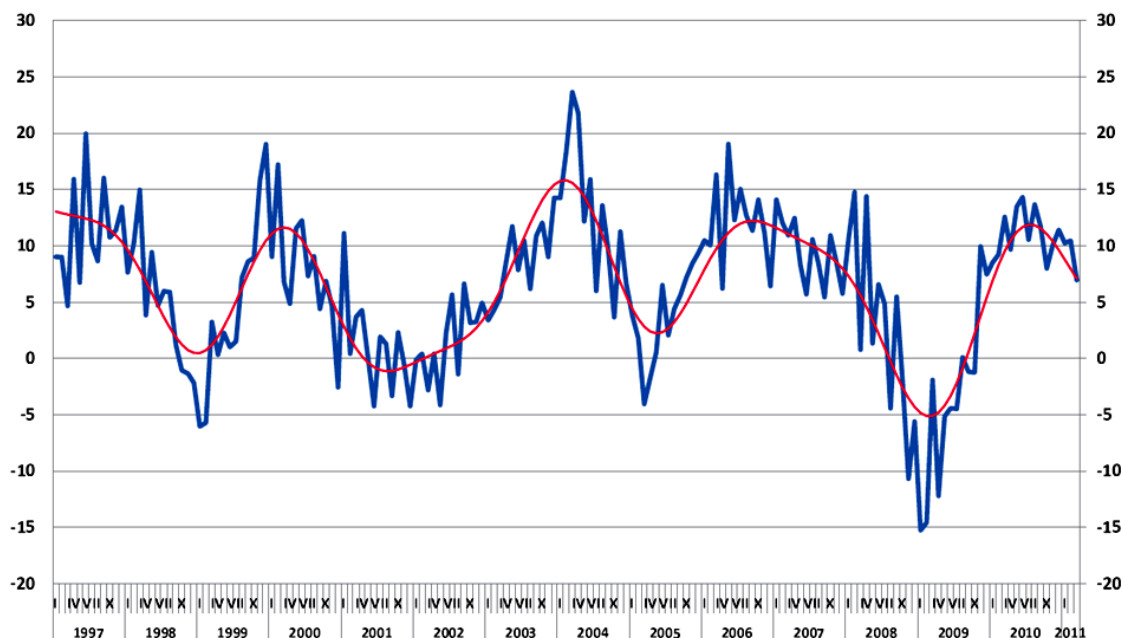
Rysunek 2.5. Produkcja przemysłowa r/r (%) w okresie od stycznia 1997 do marca 2011



Rozważmy model, w którym  $F = 3, J = 12, K = 0, S = 1$ . Odpowiada to przyjęciu trzech składowych harmonicznych w funkcji  $d(t; \delta, \varphi)$ , dwunastu opóźnień w części autoregresyjnej modelu, wykluczeniu procesu średnich ruchomych, przyjęciu postaci  $g(t; \gamma)$  reprezentującej pojedynczy, stały w czasie wyraz wolny. Ze względu na dążenie do wyodrębnienia wahań o charakterze długofalowym przyjęto, iż dziedzina parametrów  $\varphi_f$  została ograniczona do przedziału  $\langle 0; 0,52 \rangle$ . Odpowiada to wykluczeniu wahań o okresie krótszym niż jeden rok.

**Rysunek 2.6. Produkcja przemysłowa r/r (%) oraz ocena punktowa regularnych wahań cyklicznych w okresie od stycznia 1997 do marca 2011**

Produkcja przemysłowa: zmiany r/r (w procentach) oraz regularny komponent cykliczny (oceny punktowe)

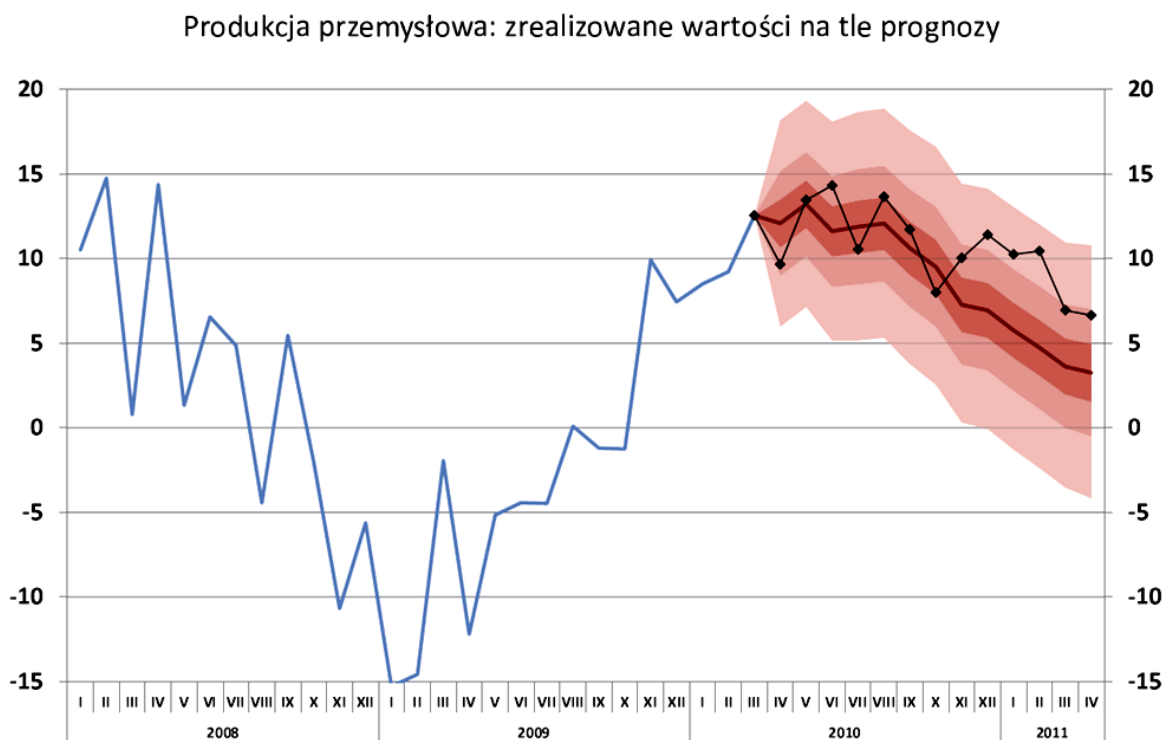


W rozpatrywanym modelu funkcja parametrów  $d(t; \delta, \varphi)$  reprezentuje regularny komponent cykliczny. Różni się ona od  $c_t(\delta, \varphi)$  wyłącznie przesunięciem o stałą wartość, reprezentującą średni poziom zmian produkcji przemysłowej. Rysunek przedstawia przebieg wartości oczekiwanej *a posteriori* funkcji  $d(t; \delta, \varphi)$  dla  $t = 1, \dots, 171$ , co odpowiada okresowi próby. Na rysunku 2.6. zaznaczono również zaobserwowane wartości danych.

Nieformalna analiza rysunku 2.6. wydaje się wskazywać, iż w rocznej dynamice produkcji przemysłowej występują cykliczne wahania o regularnym charakterze. Przebieg ocen punktowych komponentu cyklicznego wykazuje znaczną zbieżność z przebiegiem danych.

Rozpatrywany model pozwala uzyskać zarówno rozkład *a posteriori* dla przyszłych wartości regularnego komponentu cyklicznego, reprezentowanego tu przez wartości  $d(t; \delta, \varphi)$ , jak i rozkład predykcyjny dla zmiennej objaśnianej, tj. procentowych zmian produkcji przemysłowej w ujęciu rocznym. Na podstawie opisanego modelu uzyskano rozkład predykcyjny dla stopy zmian produkcji przemysłowej dla kwietnia 2011 r. (prognoza w horyzoncie  $H = 1$ ). Podana przez GUS stopa wzrostu produkcji przemysłowej w kwietniu 2011 (w porównaniu do kwietnia 2010) wynosi 6,6%. Mieści się ona pomiędzy kwantylem rzędu 0,55 rozkładu predykcyjnego (mającym wartość 6,38%) a kwantylem rzędu 0,6 (mającym wartość 6,85%). Wartość oczekiwana rozkładu predykcyjnego to 5,93% z odchyleniem standardowym wynoszącym 3,7 pp.

**Rysunek 2.7. Wykres wachlarzowy według rozkładu predyktywnego oraz zaobserwowane wartości zmian produkcji przemysłowej r/r (%); okres próby do marca 2010, okres predykcji do kwietnia 2011**



Aby zilustrować własności predyktywne modelu w dłuższym horyzoncie, przyjęto, iż ostatnia dostępna obserwacja jest wartość odpowiadająca marcowi 2010 roku. Dokonano powtórnej estymacji modelu. Rysunek 2.7. przedstawia wykres wachlarzowy otrzymany na podstawie rozkładu predyktywnego produkcji przemysłowej z zaznaczonymi zrealizowanymi wartościami danych. Wykres wachlarzowy uzyskano wykorzystując nieformalne przybliżenie: odpowiednie wartości uzyskano z brzegowych rozkładów predyktywnych dla każdego horyzontu prognozy. Pasma na wykresie wachlarzowym reprezentują odpowiednio 30%, 60% i 90% przedziały prognozy (utworzone z kwantyli brzegowych rozkładów predyktywnych). Prognozy przedstawione na rysunku 2.6. wydają się charakteryzować dobrą trafnością *ex post*. W przypadku sekwencji prognoz na 13 kolejnych okresów jedynie 3 obserwacje leżą poza 60% przedziałami predykcji.

Wydaje się, iż prezentowana metodologia pozwala zarówno na analizę regularnych wahań cyklicznych w okresie próby, jak i na uzyskanie prognozy zmiennej obserwowalnej, która w znaczący sposób wykorzystuje informacje o zidentyfikowanych w próbie wahaniami cyklicznych.

## 2.3. MODELE DLA WIELOWYMIAROWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH W ANALIZIE SCENARIUSZY SZOKOWYCH

### 2.3.1. MODELE VAR I VECM IDEA KOINTEGRACJI I ZASTOSOWANIE

Modele wektorowej autoregresji (VAR), których powszechne wykorzystanie w empirycznych badaniach makroekonomicznych zostało zapoczątkowane w pracach Simsa (por. np. Sims (1980)), są łatwym w estymacji narzędziem statystycznym. Jednocześnie, wieloletnie doświadczenia potwierdzają ich przydatność do opisu dynamicznych własności makroekonomicznych szeregów czasowych jak również analiz scenariuszowych. Modele VAR mogą być budowane bez narzucania restrykcji wynikających z teorii ekonomicznej, co umożliwia testowanie hipotez wynikających z tej teorii.

Rozważmy  $n$ -wymiarowy proces autoregresyjny rzędu  $k$  (VAR( $k$ )):

$$x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \dots + \Pi_k x_{t-k} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (23)$$

gdzie  $x_{-k+1}, x_{-k+2}, \dots, x_0$  są warunkami początkowymi,  $\varepsilon_t$  jest wektorem białym szumem, tj.  $E(\varepsilon_t) = \mathbf{0}$ ,  $E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = \Sigma$  ( $\Sigma_{n \times n}$  jest macierzą dodatnio określoną) oraz  $E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = \mathbf{0}$ , gdy  $t \neq s$ . Macierze  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , wymiaru  $n \times n$ , grupują parametry przy kolejnych opóźnieniach procesu. Wektor  $D_t$  zawiera zmienne nielosowe, takie na przykład jak stała, trend deterministyczny, zmienne sezonowe, inne zmienne typu 0-1, a macierz  $\Phi$  zawiera parametry występujące przy tych zmiennych.

Proces VAR dowolnego rzędu może być przedstawiony w postaci VAR(1):

$$X_t = \tilde{\Pi} X_{t-1} + \Phi D_t + E_t, \quad (24)$$

gdzie  $X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-k+1} \end{bmatrix}$ ,  $E_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Phi D_t = \begin{bmatrix} \Phi D_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_{k-1} & \Pi_k \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix}$ .

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do procesów spełniających następujące założenia:

**Założenie 1.1** Wartości własne macierzy  $\tilde{\Pi}$  leżą wewnątrz koła jednostkowego lub są dokładnie równe jeden.

**Założenie 1.2** Elementy wektora  $D_t$  są wielomianami zmiennej  $t$  (skończonego rzędu).



Proces VAR jest kowariancyjnie stacjonarny<sup>14</sup> wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki charakterystyczne macierzy  $\tilde{\Pi}$  leżą wewnątrz koła jednostkowego.

Jeżeli wśród pierwiastków macierzy  $\tilde{\Pi}$  pojawiają się pierwiastki jednostkowe, tj. o module równym 1, wówczas proces  $\{x_t\}$  jest niestacjonarny. Założenie (1.1) ogranicza dalsze rozważania do procesów stacjonarnych lub zintegrowanych w stopniu pierwszym ( $\{x_t\}: I(1)$ ), tj. takich, których pierwsze różnice są kowariancyjnie stacjonarne. Procesy te odgrywają ważną rolę w modelowaniu makroekonomicznych szeregów czasowych, gdyż wiele z obserwowanych szeregów posiada cechy przemawiające za tym, by traktować je jako realizacje takich procesów. Wykorzystanie zwykłej regresji do modelowania szeregów czasowych będących realizacją procesów niestacjonarnych może prowadzić do uzyskania związków pozornych, czego symptomem jest np. dobre dopasowanie modelu do danych z jednocześnie wysoką autokorelacją reszt.

Poszukiwania właściwej metody modelowania niestacjonarnych szeregów czasowych doprowadziły do powstania idei kointegracji. Procesy są skointegrowane, jeżeli istnieje ich niezerowa kombinacja liniowa prowadząca do zmniejszenia stopnia integracji. W praktyce szczególnie ważny jest przypadek, gdy kombinacja ta jest stacjonarna. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku  $CI(1,1)$ , tj. będziemy poszukiwać niezerowych, liniowych kombinacji składowych wektorowego procesu  $I(1)$  będących procesami kowariancyjnie stacjonarnymi. Z twierdzenia Grangera o reprezentacji (zob. np. Engle i Granger (1987)) wynika, że każdy wielowymiarowy proces skointegrowany można przedstawić w postaci mechanizmu korekty błędu, czyli z reprezentacji VAR (zob. równanie 23) przechodzimy do modelu VEC:

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta x_{t-i} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (25)$$

gdzie  $x_{-k+1}, x_{-k+2}, \dots, x_0$  są warunkami początkowymi,  $\{\varepsilon_t\}$  jest wektorowym białym szumem,  $\Pi = \sum_{i=1}^k \Pi_i - I_n$ ,  $\Gamma_i = -\sum_{j=i+1}^k \Pi_j$ , a przez  $\Phi D_t$  oznaczyliśmy deterministyczną część modelu. Formułując deterministyczną część modelu VEC należy uważnie prześledzić wpływ przyjętych założeń zarówno na przyrosty, jak i poziomy analizowanego procesu, zob. np. Johansen (1996), Juselius (2007). Jeżeli analizowany proces  $\{x_t\}$  jest procesem zintegrowanym, wówczas macierz  $\Pi$  jest macierzą niepełnego rzędu ( $r(\Pi) = r < n$ ). Dla  $r=0$  proces  $\{x_t\}$  jest zintegrowany, ale nie jest skointegrowany, dla  $0 < r < n$  proces jest skointegrowany i wówczas macierz  $\Pi$  można (niejednoznacznie) przedstawić w postaci iloczynu dwóch macierzy  $\alpha_{n \times r}$  oraz  $\beta_{n \times r}$  o pełnym rzędzie kolumnowym:

<sup>14</sup>Proces stochastyczny  $x_t, t \in \mathbb{Z}$  jest kowariancyjnie stacjonarny, jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej  $t$  spełnione są warunki:  $E(x_t) = \mu$ ,  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $E((x_t - \mu)(x_t - \mu)') = \Sigma_0 < +\infty$  oraz  $E((x_t - \mu)(x_{t+h} - \mu)') = \Sigma_h < +\infty$ ,  $h = 1, 2, \dots$

$$\Pi = \alpha\beta'. \quad (26)$$

W kolumnach macierzy  $\beta$  zapisane są wektory kointegrujące, które definiują dynamiczną równowagę długookresową. W systemie będącym w równowadze nie pojawiają się żadne wewnętrzne czynniki, by tę sytuację zmieniać, natomiast, kiedy, na skutek działania czynników zewnętrznych, system zostanie wytrącony z równowagi, jego składowe, próbując przywrócić równowagę, reagują na pojawiający się błąd poprzez parametry dostosowań zgromadzone w macierzy  $\alpha$ .

Jedną z głównych zalet makroekonomicznych modeli z mechanizmem korekty błędu jest więc wyraźne oddzielenie zależności krótkookresowych (opisywanych przez parametry zawarte w macierzach  $\Gamma_i$ ,  $i=1,2,\dots,k-1$ ) od długookresowych, zwykle popartych teorią ekonomiczną i będących głównym celem analizy.

Parametry modeli VAR/VEC nie mają bezpośredniej interpretacji, lecz przechodząc do reprezentacji średnich ruchomych możemy badać własności modelowanych procesów i ich zależności, poprzez na przykład analizę funkcji reakcji na zakłócenia losowe, która umożliwia prześledzenie wpływu szoku innowacyjnego w wybranej zmiennej wielowymiarowego procesu na jego składowe.

Przedstawmy kowariancyjnie stacjonarny proces VAR( $k$ ) bez składowych deterministycznych (dla ułatwienia zapisu) w postaci wektorowego modelu średniej ruchomej nieskończonego rzędu MA( $\infty$ ):  $x_t = \varepsilon_t + \Psi_1\varepsilon_{t-1} + \dots$ , gdzie  $\Psi_i = \tilde{J}\tilde{\Pi}^i J'$ ,  $J_{n \times nk} = [I_n \ : \ 0 \ : \ \dots \ : \ 0]$ . Element  $\psi_{jk,i}$ , tj. element  $jk$  macierzy  $\Psi_i$  reprezentuje reakcję  $j$ -tej zmiennej z systemu na jednostkowy<sup>15</sup> szok zmiennej  $k$  po  $i$  okresach, przy założeniu braku innych zaburzeń (zob. np. Luetkepohl (2007)).

Prowadząc podobną analizę dla procesu skointegrowanego:

$$\Delta x_t = \alpha\beta' x_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

najpierw przechodzimy do jego reprezentacji VAR:

$$x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \dots + \Pi_k x_{t-k} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

gdzie:  $\Pi_1 = \alpha\beta' + I_n + \Gamma_1$ ,  $\Pi_i = \Gamma_i - \Gamma_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, k-1$  oraz  $\Pi_k = -\Gamma_{k-1}$ . Następnie wyznaczamy funkcje reakcji na zaburzenia losowe wg schematu przedstawionego wyżej.

<sup>15</sup>Rozważa się również szoki o wielkości równej jednemu odchyleniu standardowemu, zwłaszcza wówczas, gdy zmienne z systemu prezentowane są na różnych skalach.

### 2.3.2. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI VAR I VECM METODĄ NAJWIĘKSZEJ WIARYGODNOŚCI

Jeżeli znamy typ rozkładu analizowanego procesu, do estymacji jego parametrów możemy wykorzystać metodę największej wiarygodności (MNW). Załóżmy, że proces VAR(k) dany równaniem (23) ma  $nT$ -wymiarowy rozkład normalny, tj.  $\varepsilon_t : iin^n(0, \Sigma)$  i, dla uproszczenia notacji, zapiszmy proces (23) następująco:

$$x_t = \mathbf{B}'Z_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (27)$$

gdzie:  $\mathbf{B}' = [\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \dots \quad \Pi_k \quad \Phi]$ ,  $Z_t' = [x_{t-1}' \quad x_{t-2}' \quad \dots \quad x_{t-k}' \quad D_t']$ , a warunki początkowe  $X^0 = [x_0' \quad x_{-1}' \quad \dots \quad x_{-k+1}']$  są ustalone. Otrzymujemy następującą zlogarytmowaną funkcję wiarygodności<sup>16</sup> (zob., np. Juselius (2007)):

$$\ln L(\mathbf{B}, \Sigma; X) = -T \frac{n}{2} \ln(2\pi) - T \frac{1}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (x_t - \mathbf{B}'Z_t)' \Sigma^{-1} (x_t - \mathbf{B}'Z_t), \quad (28)$$

która osiąga maksimum w punkcie:

$$\hat{\mathbf{B}}' = \sum_{t=1}^T (x_t Z_t') (\sum_{t=1}^T Z_t Z_t')^{-1} = M_{xz} M_{zz}^{-1}, \quad (29)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mathbf{B}}'Z_t)(x_t - \hat{\mathbf{B}}'Z_t)' = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'. \quad (30)$$

Przechodząc do omówienia estymacji modelu VEC należy zaznaczyć, że do głównych problemów pojawiających się w analizie kointegracji, zarówno na gruncie klasycznym, jak i bayesowskim, należy nieidentyfikowalność parametrów wektorowego modelu z mechanizmem korekty błędu. Macierz  $\Pi$ , będącą macierzą niepełnego rzędu, dekomponujemy na macierz wektorów kointegrujących  $\beta$  oraz macierz współczynników dostosowań  $\alpha$ . Dekompozycja ta nie jest jednoznaczna, ponieważ dla dowolnej macierzy  $\mathbf{C}_{r \times r}$  pełnego rzędu zachodzi:  $\Pi = \alpha\beta' = \alpha\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\beta'$ , innymi słowy dane zawierają informację jedynie o przestrzeni kointegrującej, a nie wektorach ją rozpinających.

Wykorzystanie metody największej wiarygodności do estymacji parametrów modelu VEC opiera się na zastosowaniu procedur zaproponowanych w 1951 roku przez T.W. Andersona do analizy regresji niepełnego rzędu. Podejście to w analizie modeli VEC zostało zaproponowane i opracowane przez S. Johansena i dlatego nazywane jest procedurą Johansena. Zapiszmy model VEC dany równaniem (25) wykorzystując następujące zwyczajowo przyjmowane oznaczenia (zob. np. Johansen (1996), Juselius (2007)):

<sup>16</sup>  $\ln(\cdot)$  jest funkcją rosnącą, a więc nie zmienia położenia ekstremum funkcji wiarygodności.

$$\begin{aligned} Z_{0t} &= \Delta x_t, \\ Z_{1t} &= x_{t-1}, \\ Z_{2t} &= [\Delta x'_{t-1} \quad \Delta x'_{t-2} \quad \dots \quad \Delta x'_{t-k+1} \quad D'_t] \end{aligned}$$

czyli:

$$Z_{0t} = \alpha\beta'Z_{1t} + \Gamma'Z_{2t} + \varepsilon_t, \quad (31)$$

$$\text{gdzie } \Gamma' = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \dots \quad \Gamma_{k-1} \quad \Phi].$$

Przyjmując założenie  $\varepsilon_t : iinN^n(0, \Sigma)$  otrzymujemy następującą zlogarytmowaną funkcję wiarygodności:

$$\ln L(\alpha, \beta, \Gamma, \Sigma; X) = -T \frac{n}{2} \ln(2\pi) - T \frac{1}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Z_{0t} - \alpha\beta'Z_{1t} - \Gamma'Z_{2t})' \Sigma^{-1} (Z_{0t} - \alpha\beta'Z_{1t} - \Gamma'Z_{2t}), \quad (32)$$

Ze względu na złożoną postać funkcji wiarygodności danej równaniem (32) szukając jej maksimum w kolejnych krokach buduje się skoncentrowane funkcje wiarygodności.

Funkcja (32), przy ustalonym  $r$ , osiąga maksimum w punkcie (zob. np. Johansen (1996)):

$$\hat{\beta} = S_{11}^{-\frac{1}{2}} [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_r], \quad (33)$$

$$\hat{\alpha} = S_{01} \hat{\beta} (\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta})^{-1}, \quad (34)$$

$$\hat{\Gamma}' = (M_{02} - \hat{\alpha} \hat{\beta}' M_{12}) M_{22}^{-1}, \quad (35)$$

$$\hat{\Sigma} = S_{00} - S_{01} \hat{\beta} (\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta})^{-1} \hat{\beta}' S_{10}, \quad (36)$$

gdzie  $M_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_{it} Z'_{jt}$ ,  $S_{ij} = M_{ij} - M_{i2} M_{22}^{-1} M_{2j}$  dla  $i, j = 0, 1$ , a  $v_1, v_2, \dots, v_r$  są wektorami własnymi macierzy  $S_{11}^{-\frac{1}{2}} S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} S_{11}^{-\frac{1}{2}}$  odpowiadającymi  $r$  pierwszym wartościom własnym tej macierzy, ułożonym w nierosnącym porządku.

### 2.3.3. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI VAR I VECM W UJĘCIU BAYESOWSKIM

Przystępując do opisu estymacji modeli VAR i VEC w ujęciu bayesowskim zasygnalizujemy jego ideę. Podstawową cechą odróżniającą metody wnioskowania bayesowskiego od metod klasycznych jest interpretacja prawdopodobieństwa. W statystyce

klasycznej przyjmuje się interpretację częstościową, natomiast na gruncie bayesowskim obowiązuje interpretacja subiektywna, bowiem prawdopodobieństwo ma wyrażać stopień przekonania co do prawdziwości danego zdania (zob. np. Osiewalski (2001)). W modelu bayesowskim parametry ( $\theta$ ) są zmiennymi losowymi, a bayesowski model statystyczny jest jednoznacznie scharakteryzowany poprzez funkcję gęstości łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora obserwowanego, wektora prognozowanego oraz wektora parametrów:

$$p(x, x_f, \theta) = p(x_f | x, \theta) p(x | \theta) p(\theta),$$

gdzie  $x$  jest wektorem zaobserwowanych wartości,  $x_f$  – wektorem przyszłych realizacji,  $\theta$  – wektorem parametrów,  $p(x_f | x, \theta)$  oznacza próbkową gęstość predykcyjną,  $p(\cdot | \theta)$  – funkcję gęstości określoną na zbiorze możliwych realizacji zjawiska, a  $p(\theta)$  – gęstość rozkładu *a priori*, który odzwierciedla naszą wstępną niepewność, co do wartości parametru  $\theta$ . Wnioskowanie odbywa się zgodnie z zasadami rachunku prawdopodobieństwa, z wykorzystaniem m.in. twierdzenia Bayesa. Estymacja wektora parametrów  $\theta$  odbywa się w oparciu o warunkowy rozkład  $\theta$  przy ustalonym wektorze obserwacji  $x$ , tj. w oparciu o tzw. rozkład *a posteriori*, którego gęstość zadana jest wzorem:

$$p(\theta | x) = \frac{p(x | \theta) p(\theta)}{\int_{\Theta} p(x | \theta) p(\theta) d\theta}.$$

Zapiszmy model VAR (27) w notacji macierzowej:

$$X = ZB + E, \tag{37}$$

gdzie  $X' = [x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_T]$ ,  $Z' = [z'_1 \ z'_2 \ \dots \ z'_T]$ ,  $E' = [\varepsilon'_1 \ \varepsilon'_2 \ \dots \ \varepsilon'_T]$  i przyjmijmy następujące rozkłady *a priori*:

1. dla  $\Sigma$  – odwrotny Wisharta o parametrze macierzowym  $S$  oraz  $q$  stopniach swobody:  
 $\Sigma : iW(S, q)$ ,
2. dla  $B$  – warunkowy względem  $\Sigma$ , scentrowany w  $B^*$  macierzowy rozkład normalny:  
 $B | \Sigma : mN(B^*, \Sigma, G)$ , gdzie  $G_{(nk+l) \times (nk+l)}$  jest znaną macierzą dodatnio określoną,  $l$  oznacza liczbę zmiennych nielosowych.

Rozkłady te wraz z założeniem o normalności analizowanego procesu ( $\varepsilon_t : iIN^n(0, \Sigma)$ ) prowadzą do następującego układu pełnych warunkowych rozkładów *a posteriori* (co ułatwia uzyskanie próby pseudolosowej z rozkładu *a posteriori*):

1. odwrotny Wisharta dla  $\Sigma$  :

$$p(\Sigma | \mathbf{B}, X) = iW(S + (\mathbf{B} - B^*)' G^{-1} (\mathbf{B} - B^*) + E' E, q + nk + l + T),$$

2. macierzowy normalny dla  $\mathbf{B}$  :

$$p(\mathbf{B} | \Sigma, X) = mN(\mu_{\mathbf{B}}, \Sigma, (G^{-1} + Z'Z)^{-1}),$$

$$\text{gdzie } \mu_{\mathbf{B}} = (G^{-1} + Z'Z)^{-1}(G^{-1}B^* + Z'X).$$

W części poświęconej bayesowskiej estymacji modeli VEC zostanie przedstawiony model zaproponowany przez Strachana i Indera (zob. Strachan i B.Inder (2004)) ze schematem losowania z rozkładu *a posteriori* omówionym w pracy Koopa, León-Gonzáleza, Strachana (zob. Koop i inni (2010)). Autorzy modelu dla estymacji przestrzeni kointegrującej wykorzystali klasę rozkładów *MACG* z parametrem macierzowym  $\Omega_{m \times m}$  (*matrix angular central Gaussian distributions*, zob. np. Chikuse (2002)). Dla opisu przestrzeni Strachan i Inder (zob. Strachan i Inder (2004)) wykorzystali wektory spełniające warunek  $\beta' \beta = I_r$ , gdzie  $I_r$  jest macierzą jednostkową stopnia  $r$ , tj. estymowana macierz wektorów kointegrujących dana jest z dokładnością do pewnej macierzy  $Q$  ortogonalnej stopnia  $r$ , tj.  $Q \in O(r)$ .

**Twierdzenie 3.1** *Jeżeli macierz losowa  $Z$  wymiaru  $m \times r$  ma rozkład macierzowy normalny*

*$mN_{m \times r}(0, I_r, \Omega)$ , to jej orientacja  $H_Z = Z(Z'Z)^{-\frac{1}{2}}$  ma rozkład MACG z parametrem  $\Omega$  o następującej funkcji gęstości:*

$$p(H_Z) = |\Omega|^{-\frac{r}{2}} |H_Z' \Omega H_Z|^{-\frac{m}{2}}.$$

Dowolną macierz  $Z_{n \times r}$  rzędu  $r$  (prawie wszędzie) można jednoznacznie (prawie wszędzie) przedstawić w postaci iloczynu  $Z = H_Z T_Z^{\frac{1}{2}}$ , gdzie  $H_Z = Z(Z'Z)^{-\frac{1}{2}}$  jest macierzą o ortonormalnych kolumnach oraz  $T_Z = Z'Z$  jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia  $r$  (Cadet (1996), Muirhead (1982)). Macierz  $H_Z$  nazywamy orientacją macierzy  $Z$ ,  $T_Z^{\frac{1}{2}}$  częścią eliptyczną (koncentracją) macierzy  $Z$ . Przestrzenie rozpinane przez kolumny macierzy  $Z$  oraz  $H_Z$  są takie same ( $sp(Z) = sp(H_Z)$ ). Dla dowolnej symetrycznej dodatnio określonej macierzy rzeczywistej  $M$  przyjmujemy następującą definicję pierwiastka kwadratowego:  $M^{\frac{1}{2}} = C \Lambda C'$  oraz  $M^{-\frac{1}{2}} = C \Lambda^{-1} C'$ , gdzie  $\Lambda$  jest macierzą diagonalną zawierającą na głównej przekątnej pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy  $M$ , a  $C$  zawiera ortonormalne wektory własne  $M$  (zob. np. Johansen (1996)).

Przez parametr rozkładu *MACG*( $\Omega$ ) możliwe jest wprowadzenie do modelu wstępnej informacji dotyczącej przestrzeni kointegrującej lub wyrażenie jej braku (wówczas  $\Omega$  jest macierzą jednostkową stopnia  $m$ ). W rozkładzie informacyjnym przyjmujemy  $\Omega = P_{\tau} = H H' + \tau H_{\perp} H'_{\perp}$ , gdzie  $H_{m \times s}$ ,  $s \geq r$  ( $H' H = I_r$ ) jest macierzą zawierającą wstępną

informację dotyczącą przestrzeni kointegrującej,  $H_{\perp}$  – macierzą rozpinającą dopełnienie ortogonalne przestrzeni  $sp(H)$ , a  $\tau$  – parametrem wyrażającym wagę przypisywaną przestrzeni  $sp(H)$ .

Dla wykorzystania wyżej opisanego rozkładu z jednocześnie wygodnym i efektywnym schematem losowania z rozkładu a posteriori Koop, León-González i Strachan (zob. Koop i inni (2010)) proponują wyjść od parametryzacji  $\Pi = AB' \equiv \alpha\beta'$ , gdzie  $B \in \mathbb{R}^{mr}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{nr}$  oraz  $B = \beta(B'B)^{\frac{1}{2}}$ ,  $A = \alpha(B'B)^{\frac{1}{2}}$ , przyjmując dla  $B$  i  $A$  rozkłady macierzowe normalne:  $B | \tau, r: mN(0, m^{-1}I_r, P_{\tau})$ ,  $A | \nu, r: mN(0, \nu I_r, \Sigma)$ . Wychodząc od rozkładu dla  $B$  otrzymujemy dla  $\beta$  rozkład  $MACG(P_{\tau})$ .

Dla pozostałych parametrów modelu można przyjąć następujące rozkłady *a priori*:

1. dla  $\Sigma$  – odwrotny Wisharta o parametrze macierzowym  $S$  oraz  $q$  stopniach swobody:  $\Sigma: iW(S, q)$ ,
2. dla  $\Gamma$  – warunkowy względem  $\Sigma$ , scentrowany w zerze macierzowy rozkład normalny:  $\Gamma | \Sigma, h: mN(0, \Sigma, hI_{n(k-1)+l})$ , gdzie  $h > 0$  jest parametrem regulującym stopień rozproszenia rozkładu, a  $l$  oznacza liczbę zmiennych nielosowych,
3. dla  $\tau, \nu$  oraz  $h$ , jeżeli decydujemy się na ich estymację, odwrotne rozkłady gamma:  $\tau: iG(s_{\tau}, n_{\tau})$ ,  $\nu: iG(s_{\nu}, n_{\nu})$ ,  $h: iG(s_h, n_h)$ . W rozkładzie *a priori* dla  $\tau$  należy przyjąć takie parametry, aby cała masa prawdopodobieństwa była skupiona w przedziale od 0 do 1, tak by więcej prawdopodobieństwa przypisać przestrzeni  $sp(H)$ .

Przyjęcie wyżej wymienionych rozkładów *a priori* prowadzi do następującego układu pełnych warunkowych rozkładów *a posteriori* (zob. np. Wróblewska (2010)):

1. odwrotny Wisharta dla  $\Sigma$ :

$$p(\Sigma | A, B, \Gamma, \nu, \tau, h, r, X) = iW\left(S + \frac{1}{h}\Gamma'\Gamma + \frac{1}{\nu}AA' + E'E, q + n(k-1) + l + r + T\right),$$

2. macierzowy normalny dla  $A$ :

$$p(A | \Sigma, B, \Gamma, \nu, \tau, h, r, X) = mN\left(\mu_A, (B'Z_1'Z_1B + \frac{1}{\nu}I_r)^{-1}, \Sigma\right),$$

$$\text{gdzie } \mu_A = (Z_0 - Z_2\Gamma)'Z_1B(B'Z_1'Z_1B + \frac{1}{\nu}I_r)^{-1},$$

3. normalny dla wektora  $vec(B)$ :

$$p(vec(B) | \Sigma, A, \Gamma, \nu, \tau, h, r, X) = N(\mu_{\nu B}, \Omega_{\nu B}),$$

gdzie  $\Omega_{vB} = [(A'\Sigma^{-1}A) \otimes (Z_1'Z_1)] + [mI_r \otimes P_1]^{-1}$ ,  $\mu_{vB} = \Omega_{vB} \text{vec}(Z_1'(Z_0 - Z_2\Gamma)\Sigma^{-1}A)$ ,

4. macierzowy normalny dla  $\Gamma$  :

$$p(\Gamma | \Sigma, A, B, v, \tau, h, r, X) = mN(\mu_\Gamma, \Sigma, (\frac{1}{h} I_{n(k-1)+l} + Z_2'Z_2)^{-1}),$$

gdzie  $\mu_\Gamma = (\frac{1}{h} I_{n(k-1)+l} + Z_2'Z_2)^{-1} Z_2'(Z_0 - Z_1\beta\alpha')$ ,

5. odwrotne gamma dla  $v$  oraz  $h$  :

$$p(v | \Sigma, A, B, \Gamma, \tau, h, r, X) = iG(s_v + \frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1}AA'), n_v + \frac{nr}{2}),$$

$$p(h | \Sigma, A, B, \Gamma, \tau, v, r, X) = iG(s_h + \frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1}\Gamma'\Gamma), n_h + \frac{n(n(k-1)+l)}{2}),$$

6. dla  $\tau$  :

$$p(\tau | B, r, X) \propto P_\tau^{-\frac{1}{r}} \tau^{-n_\tau-1} \exp(-\frac{1}{\tau} (s_{\tau au} + \frac{m}{2} \text{tr}(BH_\perp H_\perp' B'))).$$

Próbe pseudolosową z rozkładu *a posteriori* można uzyskać wykorzystując rozszerzony próbnik Gibbsa (*parameter augmented Gibbs sampling*, zob. Koop i inni (2010), Wróblewska (2010)):

1. Wyznaczamy arbitralnie wektor wartości początkowych:  $(\Sigma^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \Gamma^{(0)}, v^{(0)}, h^{(0)}, \tau^{(0)})$ .

2. Wylosowanie jednej realizacji  $(\Sigma^{(s)}, A^{(s)}, B^{(s)}, \Gamma^{(s)}, v^{(s)}, h^{(s)}, \tau^{(s)})$  składa się z następujących kroków:

(a) Losujemy  $\Sigma^{(s)}$  z rozkładu

$$p(\Sigma | A = A^{(s-1)}, B = B^{(s-1)}, \Gamma = \Gamma^{(s-1)}, v = v^{(s-1)}, h = h^{(s-1)}, \tau = \tau^{(s-1)}, r, X),$$

(b) Losujemy  $A^{(s)}$  z rozkładu

$$p(A | \Sigma = \Sigma^{(s)}, B = B^{(s-1)}, \Gamma = \Gamma^{(s-1)}, v = v^{(s-1)}, h = h^{(s-1)}, \tau = \tau^{(s-1)}, r, X),$$

(c) Losujemy  $B^{(s)}$  z rozkładu

$$p(B | \Sigma = \Sigma^{(s)}, A = A^{(s)}, \Gamma = \Gamma^{(s-1)}, v = v^{(s-1)}, h = h^{(s-1)}, \tau = \tau^{(s-1)}, r, X),$$

(d) Obliczamy  $\beta$  i  $\alpha$  przyjmując  $\beta = B(B'B)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = A(B'B)^{\frac{1}{2}}$  ( $\Pi = \alpha\beta' = AB'$ ),

(e) Losujemy  $\Gamma^{(s)}$  z rozkładu

$$p(\Gamma | \Sigma = \Sigma^{(s)}, \alpha = \alpha^{(s)}, \beta = \beta^{(s)}, v = v^{(s-1)}, h = h^{(s-1)}, \tau = \tau^{(s-1)}, r, X),$$

(f) Losujemy  $v^{(s)}$  z rozkładu  $p(v | \Sigma = \Sigma^{(s)}, \alpha = \alpha^{(s)}, \beta = \beta^{(s)}, h = h^{(s-1)}, \tau = \tau^{(s-1)}, r, X)$ ,



(g) Losujemy  $h^{(s)}$  z rozkładu  $p(h | \Sigma = \Sigma^{(s)}, \alpha = \alpha^{(s)}, \beta = \beta^{(s)}, \nu = \nu^{(s)}, \tau = \tau^{(s-1)}, r, X)$ ,

(h) Dla wylosowania parametru  $\tau$  z rozkładu *a posteriori* wykorzystujemy, np. algorytm Metropolis i Hastings z generowaniem wartości wstępnych z rozkładu

$$iG(s_\tau + \frac{m}{s} tr(BH_\perp H'_\perp B'), n_\tau).$$

#### 2.3.4. WYKORZYSTANIE BAYESOWSKICH MODELI VAR I VECM W PROGNOZOWANIU

Modele VEC wykorzystywane w analizie kointegracji mogą różnić się liczbą opóźnień w dynamice krótkookresowej ( $k$ ), liczbą relacji kointegrujących ( $r$ ), rodzajem trendu ( $d$ ), dodatkowymi restrykcjami nałożonymi na przestrzeń kointegrującą ( $o$ ,  $o \in 0, 1, \dots, \mathfrak{S}$ , gdzie  $o=0$  oznacza brak restrykcji), formą egzogeniczności wybranych zmiennych ( $e$ ). Szczegółowy opis najczęściej rozważanych liniowych restrykcji nakładanych na przestrzeń kointegrującą i przestrzeń współczynników dostosowań oraz rozważania dotyczące trendów można znaleźć np. w pracy Johansena (zob. Johansen (1996)). W tym miejscu warto podkreślić, że stosując bayesowski model VEC możemy te restrykcje wyrazić poprzez warunki nakładane bezpośrednio na przestrzeń kointegrującą.

Niech  $\xi = (k, r, d, o, e) \in \Xi$  będzie wektorem opisującym rozważane cechy, a  $M_\xi$  oznacza model o tych cechach. Przed przystąpieniem do wyznaczania prawdopodobieństw *a posteriori*, badanym modelom należy przypisać prawdopodobieństwa *a priori*, np. tak aby *a priori* wszystkie rozważane modele były jednakowo prawdopodobne, lub by modele oszczędniej sparametryzowane uczynić bardziej prawdopodobnymi. Znając prawdopodobieństwa *a priori*, możemy, korzystając z poniższego wzoru, wyznaczyć prawdopodobieństwa *a posteriori*:

$$p(M_\xi) = \frac{p(M_\xi)p(X | M_\xi)}{\sum_{\zeta \in \Xi} p(M_\zeta)p(X | M_\zeta)}, \quad \xi \in \Xi, \quad (38)$$

gdzie  $p(X | M_\xi)$  jest brzegową gęstością wektora obserwacji w modelu  $M_\xi$ . Analityczne wyznaczenie brzegowej gęstości wektora obserwacji jest zazwyczaj bardzo trudne lub wręcz niemożliwe, dlatego do jej wyznaczenia stosuje się metody numeryczne lub aproksymacje.

Stosując metodę bayesowskiego łączenia wiedzy wyznaczone prawdopodobieństwa *a posteriori* można wykorzystać w dalszej analizie badanego zjawiska, dzięki czemu otrzymane wnioski nie będą opierały się na jednym wybranym modelu, ale będą odzwierciedlały również niepewność związaną z jego specyfikacją (zob. np. Osiewalski (2001)).

W niniejszym podrozdziale idea techniki bayesowskiego łączenia wiedzy zostanie przedstawiona w ramach prognozowania. Wyznaczając prognozę procesu skointegrowanego przechodzimy z reprezentacji VEC do VAR wg schematu zaprezentowanego w podrozdziale 2.3.

Bayesowska predykcja oparta jest na rozkładzie predyktywnym, tj. na warunkowym względem obserwacji rozkładzie przyszłych wartości analizowanego procesu. Oznaczmy wektor prognozowanych wartości przez  $\bar{X} = (x_{T+1}, x_{T+2}, \dots, x_{T+h})$ , gdzie  $h$  jest horyzontem prognozy. Warunkowy, względem zaobserwowanych wartości  $X$ , rozkład predyktywny otrzymujemy uśredniając, po przestrzeni parametrów, tzw. próbkową gęstość predyktywną  $p(\bar{X} | \theta, X)$  z wykorzystaniem gęstości rozkładu *a posteriori* dla parametrów modelu jako funkcji wagowej (Osiewalski (2001), Zellner (1971)):

$$p(\bar{X} | X) = \int_{\Theta} p(\bar{X}, \theta | X) d\theta = \int_{\Theta} p(\bar{X} | \theta, X) p(\theta | X) d\theta. \quad (39)$$

Analityczne obliczenie całki zadanej wzorem (39) w wielu przypadkach nie jest możliwe, dlatego dla uzyskania próby z rozkładu predyktywnego, posługujemy się metodami numerycznymi. Próbkową gęstość predyktywną możemy zapisać w postaci następującego iloczynu gęstości:

$$p(\bar{X} | \theta, X) = p(x_{T+1} | \theta, X) p(x_{T+2} | \theta, X, x_{T+1}) \dots p(x_{T+h} | \theta, X, x_{T+1}, x_{T+2}, \dots, x_{T+h-1}),$$

czyli chcąc uzyskać próbę z rozkładu predyktywnego, po wylosowaniu wektora parametrów z rozkładu *a posteriori*, losujemy  $x_{T+1}$  według rozkładu  $p(x_{T+1} | \theta, X)$ , następnie  $x_{T+2}$  z  $p(x_{T+2} | \theta, X, x_{T+1})$ . Taki schemat losowania kontynuujemy do założonego horyzontu prognozy. W omawianych bayesowskich modelach VAR/VEC warunkowy rozkład  $p(x_{T+i} | \theta, X, x_{T+1}, x_{T+2}, \dots, x_{T+i-1})$  jest rozkładem normalnym, a więc losowanie jest stosunkowo łatwe.

Rozkład predyktywny uwzględnia niepewność związaną zarówno z wartościami prognozowanymi, jak i z wartościami parametrów. Dodatkowo, wykorzystując technikę bayesowskiego łączenia wiedzy, dla wyznaczenia prognozy możemy rozważyć nie jeden model bayesowski, ale ich zbiór  $\{M_{\xi} : \xi \in \Xi\}$ :

$$p(\bar{X} | X) = \sum_{\xi \in \Xi} p(M_{\xi} | X) p(\bar{X} | X, M_{\xi}) = \sum_{\xi \in \Xi} p(M_{\xi} | X) \int_{\Theta_{\xi}} p(\bar{X} | \theta_{\xi}, X) p(\theta_{\xi} | X) d\theta_{\xi} \quad (40)$$

W wyniku łączenia wiedzy otrzymujemy zatem jeden końcowy rozkład predyktywny, będący średnią ważoną rozkładów predyktywny w rozważanych modelach z wagami równymi prawdopodobieństwom *a posteriori* tych modeli.

### 2.3.5. ILUSTRACJA EMPIRYCZNA

Dla zilustrowania przedstawionych metod krótko opiszemy wyniki badania przeprowadzonego z wykorzystaniem obserwacji kwartalnych z lat 1995-2007 dla pięciu szeregów czasowych: płac przeciętnych (w cenach bieżących,  $W$ ), indeksu cen konsumenta ( $P$ ), wydajności pracy (w cenach stałych,  $Z$ ), indeksu cen importu ( $M$ ), stopy bezrobocia (w procentach,  $U$ ). Małymi literami oznaczono logarytmy naturalne oryginalnych zmiennych. Pełny opis cytowanego badania znajduje się w pracy Wróblewska(2010).

Graficzna analiza badanych szeregów wskazała na zasadność wykorzystania do ich analizy takich narzędzi, które pozwolą na uwzględnienie niestacjonarności. Wszystkie szeregi podlegały wahaniom kwartalnym, dlatego też do modelu wprowadzono scentrowane zmienne sezonowe, tj. takie, które w obrębie jednego roku sumują się do zera. Pierwszym krokiem badania był wybór, ze zbioru parami wykluczających się modeli, specyfikacji najbardziej prawdopodobnych *a posteriori*. Rozważono zbiór modeli różniących się liczbą opóźnień w postaci VAR,  $k \in \{1,2,3,4,5\}$ , rodzajem trendu,  $d \in \{1,2,3,4,5\}$ , rzędem macierzy,  $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$  oraz restrykcjami nałożonymi na przestrzeń wektorów kointegrujących,  $o \in \{0,1\}$ , lub/i przestrzeń współczynników dostosowań,  $e \in \{0,1\}$ . Rodzaje restrykcji, odpowiadające kolejnym wartościom indeksu  $o$  oraz indeksu  $e$  prezentuje tabela 2.2.

**Tabela 2.2. Opis dodatkowych restrykcji (prowadzących do nadmiernej identyfikowalności)**

wartość indeksu	rodzaj restrykcji
$o = 0$	brak dodatkowych restrykcji dla przestrzeni kointegrującej
$o = 1$	jednorodność w równaniu cen
$e = 0$	brak dodatkowych restrykcji dla przestrzeni współczynników dostosowań
$e = 1$	słaba egzogeniczność cen importu

Źródło: Wróblewska (2010).

Test restrykcji jednorodności w równaniu cen, odpowiadającej indeksowi  $o = 1$ , opiera się na badaniu hipotezy postaci  $sp(\beta) \subseteq sp(H)$ ,

$$\text{gdzie } H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po uwzględnieniu wszystkich kombinacji rozważanych cech, pozostawieniu po jednym przedstawicielu ze zbioru modeli równoważnych (np.  $r = 0, d = 2$  oraz  $r = 0, d = 3$ ) i wykluczeniu kombinacji niemożliwych (np.  $r = 0, o \neq 0$ ) otrzymano 430 parami wykluczających się modeli. Dla tych modeli przyjęto równe prawdopodobieństwa *a priori*, czyli  $p(M_\xi) = 0,0023$ , gdzie  $\xi = (k, d, r, o, e)$ . Tabela 2.3. przedstawia modele, które otrzymały prawdopodobieństwo *a posteriori* nie mniejsze niż przyjęte prawdopodobieństwo *a priori*.

**Tabela 2.3. Najbardziej prawdopodobne modele,  $p(M_\xi | x) \geq p(M_\xi)$**

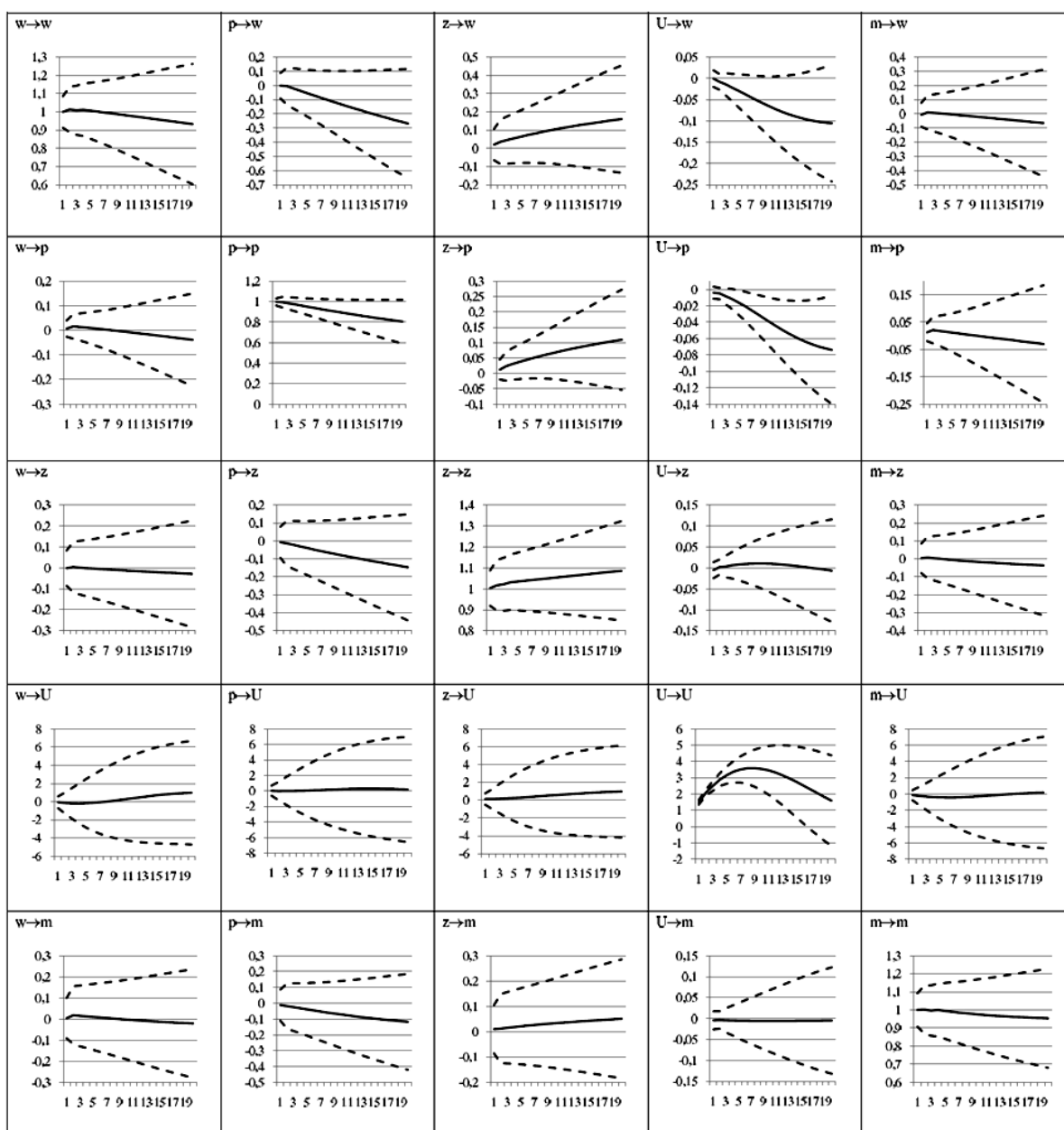
$k$	$d$	$r$	$o$	$e$	$p(M_{(k,d,r,o,e)}   x)$	$\log_{10}(\hat{p}(x   M_{(k,d,r,o,e)}))$
3	4	2	0	0	0,405	152,991
2	5	1	0	0	0,290	152,847
2	5	2	0	0	0,131	152,500
2	4	1	0	0	0,090	152,340
2	5	1	1	0	0,030	151,859
2	3	2	1	0	0,027	151,822
2	4	1	1	0	0,015	151,557
2	3	1	0	0	0,009	151,329

Źródło: Wróblewska (2010).

Wśród modeli o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori* znalazły się zarówno modele z dwiema, jak i modele z jedną relacją kointegrującą, a brzegowe prawdopodobieństwo *a posteriori* dla tej cechy wskazywało na niewielką przewagę modeli z dwoma wektorami kointegrującymi. Podobną uwagę można sformułować na temat długości opóźnienia procesu, gdzie cała masa prawdopodobieństwa *a posteriori* została skupiona na modelach VAR(2) lub VAR(3) z niewielką przewagą tych pierwszych. Zdecydowaną przewagę zdobyły modele z ubogą częścią deterministyczną, tj. modele ze stałą w relacji ( $d = 4$ ) oraz modele bez dodatkowych zmiennych deterministycznych ( $d = 5$ ).

Do analizy zależności pomiędzy składowymi badanego szeregu wykorzystano funkcje reakcji na zakłócenia losowe. Rysunek 2.8. przedstawia wykresy funkcji reakcji na zakłócenia losowe w modelu  $M_{(3,4,2,0,0)}$ , tj. w modelu najbardziej prawdopodobnym *a posteriori*.

Rysunek 2.8. Funkcje reakcji na zakłócenia losowe w modelu  $M_{(3,4,2,0,0)}$



(linią ciągłą zaznaczono wartości oczekiwane rozkładów *a posteriori*, liniami przerywanymi +/- odchylenie standardowe *a posteriori*)

Źródło: Wróblewska (2010).

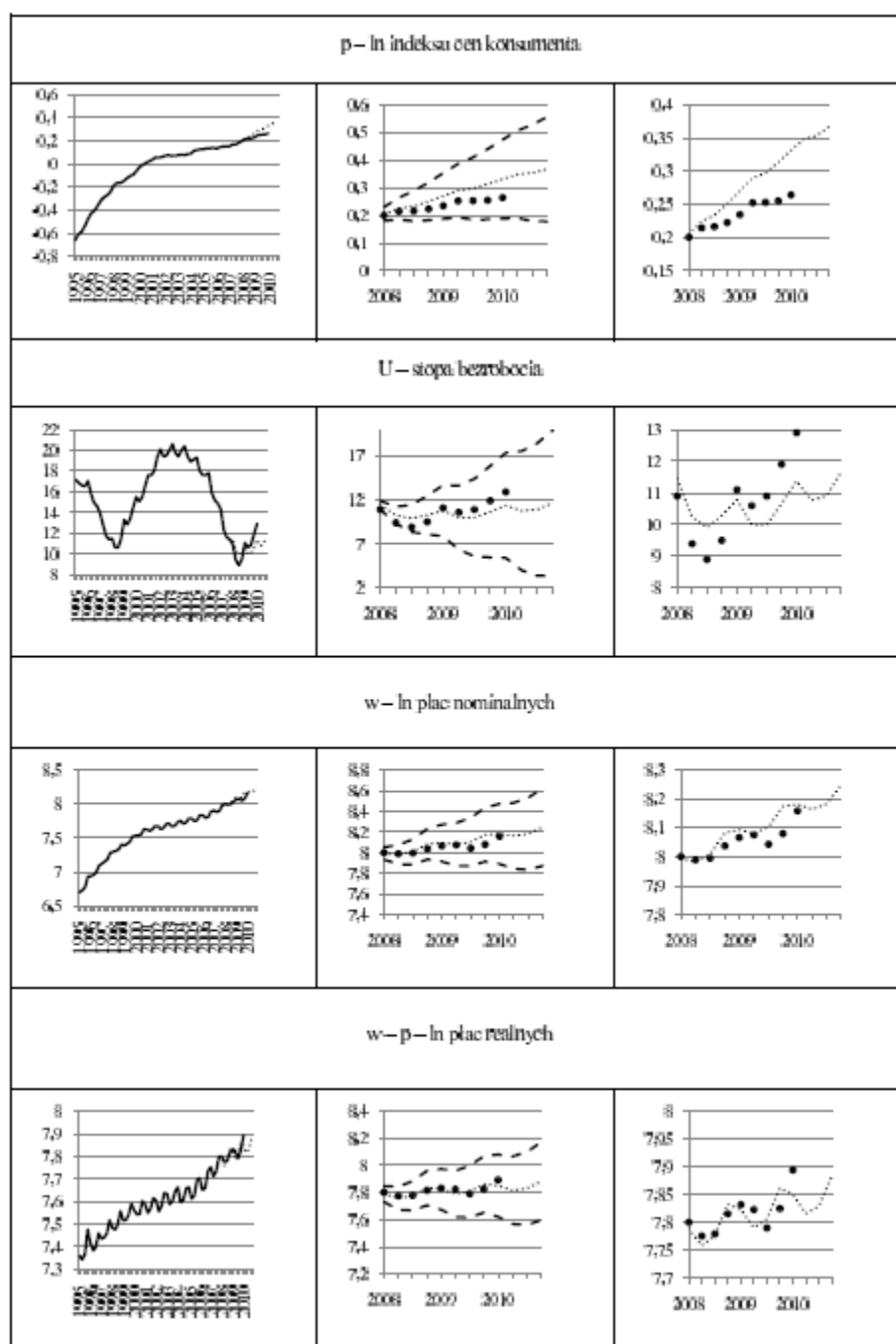
Należy zwrócić uwagę na ogromną niepewność co do wartości szacowanych wielkości, w wielu wypadkach trudno zatem interpretować nawet znak reakcji, jak na przykład w przypadku wzajemnego wpływu zaburzeń losowych w układzie płać i cen. Analizując jedynie punktowe oceny zależności płać oraz indeksu cen konsumenta, zauważamy, że jednoprocenowy wzrost płać prowadzi w początkowym okresie do niewielkiego wzrostu cen, co jest zgodne z teorią ekonomiczną, dotyczącą wzajemnej

zależności płac i cen, oraz intuicją, a następnie do ich spadku, co całkowicie przeczy teorii oraz intuicji. Reakcja płac na wzrost cen jest przeciwna do oczekiwań. Jak zaznaczono, reakcje te są bardzo nieznaczne, zwłaszcza gdy zestawimy oceny punktowe przyjęte na poziomie wartości oczekiwanych rozkładów a posteriori z odchyleniami standardowymi tych rozkładów. Być może pojawienie się tych problemów interpretacyjnych związane jest z próbą wykorzystania teorii budowanej dla zależności krótkookresowych pomiędzy przyrostami odpowiednich kategorii ekonomicznych do wyjaśnienia długookresowych zależności pomiędzy ich poziomami.

Wyraźnie widoczny jest natomiast spadek płac nominalnych i indeksu cen konsumenta spowodowany wzrostem stopy bezrobocia oraz wzrost cen w odpowiedzi na jednoprocentowy wzrost wydajności pracy. Kierunek reakcji płac na wzrost bezrobocia jest zgodny z oczekiwaniami oraz może stanowić potwierdzenie dla coraz powszechniej przyjmowanego założenia o długookresowym charakterze krzywej Phillipsa (zob. np. Majsterek (2008)). Jeśli zaś chodzi o interpretację długookresowej zależności cen od wydajności pracy, to istnieją dwie koncepcje. Jedna mówi, że wzrost wydajności pracy poprzez obniżenie jednostkowych kosztów produkcji powinien prowadzić do spadku cen, a druga, że wzrost wydajności prowadzi do produkcji dóbr coraz lepszej jakości, a tym samym do wzrostu cen. Jak widać do wytłumaczenia przebiegu badanego szeregu można wykorzystać drugą z przytoczonych koncepcji. Analizując tendencję centralną szacowanej funkcji reakcji płac nominalnych na zaburzenie wydajności pracy zauważamy, że wzrost wydajności prowadzi do wzrostu płac, co jest zgodne z oczekiwaniami.

W kolejnym etapie badania wykorzystano bayesowskie modele VEC do prognozowania przyszłych wartości wektora obserwacji. Zastosowanie bayesowskiego łączenia wiedzy pozwoliło na otrzymanie prognozy punktowej oraz oszacowanie jej niepewności, która odzwierciedlała nie tylko niepewność związaną z przyszłymi wartościami procesu i parametrów modelu, ale również z jego specyfikacją. Stosując technikę bayesowskiego łączenia wiedzy, w grupie modeli o prawdopodobieństwie *a posteriori* nie niższym niż zakładane prawdopodobieństwo *a priori*, dokonano prognozy indeksu cen konsumenta, stopy bezrobocia oraz płac nominalnych i realnych na 12 kwartałów poza okres obserwacji, tj. na lata 2008-2010 (zob. rysunek 2.9.).

Rysunek 2.9. Prognoza oraz wartości zrealizowane wybranych składowych badanego procesu



Na lewym panelu przedstawiono wartości zrealizowane procesu (linia ciągła) wraz z prognozą (linia kropkowana). W środkowym i prawym wyodrębniono okres prognozowany – punktami zaznaczono wartości zrealizowane, linią kropkowaną prognozę punktową, a liniami przerywanymi granicę obszaru oddalonego od prognozy punktowej o +/- jedno odchylenie standardowe.

Źródło: Wróblewska (2010).

Analizując uzyskane wyniki zauważono, że otrzymana prognoza trafnie przewidziała ogólną tendencję zachowania się przyszłych wartości badanego procesu. Punktowa prognoza indeksu cen konsumenta przewyższała wprawdzie wartości zrealizowane, jednak, z powodu

dużego błędu *ex ante*, którym była obarczona, wartości rzeczywiste mieściły się w obszarze wysokiej gęstości prawdopodobieństwa rozkładów predyktywnych. Co więcej, zaobserwowano powolne odchodzenie od trendu poprzedzającego okres prognozy, tzn. wyhamowywanie inflacji, co jest zgodne z rzeczywistą tendencją z prognozowanego okresu. Prognozowane stopy bezrobocia dla 2008 roku zdecydowanie przewyższyły wielkości zaobserwowane. Należy jednak zwrócić uwagę, że lata 2007-2008 charakteryzowały się dużą skalą emigracji, niespotykaną w poprzednich okresach. W 2009 roku mogliśmy zaobserwować wzrost bezrobocia, co zostało trafnie przewidziane w omawianej prognozie. Oceny prognozy punktowej uzyskane dla procesów płac nominalnych oraz płac realnych nieomal pokrywały się z wartościami zrealizowanymi. W przypadku wszystkich procesów widoczny jest charakterystyczny dla modeli niestrukturalnych wzrost niepewności prognozy wraz z wydłużaniem jej horyzontu.



## 2.4. LITERATURA

- Adamowicz E., Dudek S., Pachucki, D., Walczyk W., Synchronizacja cyklu koniunkturalnego polskiej gospodarki z krajami strefy euro w kontekście struktury tych gospodarek. *Instytut Rozwoju Gospodarczego Szkoły Głównej Handlowej*, źródło (styczeń 2010): [http://www.nbpnews.pl/r/nbpnews/Pliki\\_PDF/NBP/Publikacje/analizy/irg\\_sghP.pdf](http://www.nbpnews.pl/r/nbpnews/Pliki_PDF/NBP/Publikacje/analizy/irg_sghP.pdf), 2008.
- Barczyk R., Kąsek L., Lubiński M., Marczewski K., *Nowe oblicza cyklu koniunkturalnego*, PWE, Warszawa 2006.
- Baxter M., King R.G., *Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*. *The Review of Economics and Statistics*, 81(4):575-593, 1999.
- Besicovitch A.S., *Almost Periodic Functions*. Cambridge University Press, London 1932.
- Brockwell P.J., Davis R.A., *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag, New York 2002.
- Brockwell P.J. Davis R.A. *Time series: theory and methods*. Springer-Verlag New York, Inc., New York 1986.
- Cadet A., *Polar coordinates in the Rnp; Application to the computation of the Wishart and Beta Laws*, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 58, 1996.
- Chikuse Y., *Statistics on special manifolds*. Springer, New York 2002.
- Christiano L.J., Fitzgerald T.J., *The band-pass filter*, *International Economic Review*, 44:435-465, 2003.
- Corduneanu C., *Almost Periodic Functions*. Chelsea, New York 1989.
- Engle R.F., Granger C.W.J., *Cointegration and error correction: representation, estimation and testing*, *Econometrica*, 55, 1987.
- Franses P.H., *Stochastic Trends in Economic Time Series*, Oxford University Press, New York 1996.
- Franses P.H., Boswijk H.P., *Temporal aggregation in a periodically integrated autoregressive process*, *Statistics and Probability Letters*, 30:235-240, 1996.
- Franses P.H., Dijk D., *The forecasting performance of various models for seasonality and nonlinearity for quarterly industrial production*, *International Journal of Forecasting*, 21:87-102, 2005.
- Franses P.H., Ooms M., *A periodic long-memory model for quarterly UK inflation*, *International Journal of Forecasting*, 13:117-126, 1997.
- Franses P.H., Paap R., *Periodic Time Series Models*, Oxford University Press, Oxford 2004.
- Gómez V., *The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19(3):365-373, 2001.
- Gómez V., *Three equivalent methods for filtering finite nonstationary time series*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 17(1):109-117, 1999.
- Gardner W.A., Napolitano A., Paura L., *Cyclostationarity: Half a century of research*, *Signal Processing*, 86:639-697, 2006.

- Gelfand, A.E., Marriott J., Ravishanker N., Pai J., *Bayesian analysis of ARMA processes: complete sampling based inference under exact likelihoods*, [w:] D. Berry and K. Chaloner and J. Geweke (red.), *Bayesian Statistics and Econometrics: Essays in Honor of Arnold Zellner*, pages 241-256, J. Wiley and Sons, New York 1995.
- Gladyshev E.G., *Periodically correlated random sequence*, *Sov. Math.*, 2:385-388, 1961.
- Gradzewicz M., Growiec J., Hagemeyer J., Popowski P., *Cykl koniunkturalny w Polsce – wnioski z analizy spektralnej*, *Bank i Kredyt*, 41(5):41-76, 2010.
- Hodrick R.J., Prescott E.C., *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, *Journal of Money, Credit and Banking*, 29:1-16, 1997.
- Johansen S., *Likelihood-based inference in cointegrated vector auto-regressive models*, Oxford University Press, New York 1996.
- Juselius K., *The Cointegrated VAR Model. Methodology and Applications*, Oxford University Press, New York 2007.
- Kaiser R., Moravall A., *Estimation of the business cycle: A modified Hodrick-Prescott filter*, *Spanish Economic Review*, 1:175-206, 1999.
- Konopczak K., *Analiza zbieżności cyklu koniunkturalnego gospodarki Polskiej ze strefą euro na tle krajów Europy Środkowo-Wschodniej oraz Państw członkowskich strefy euro*, *Projekty Badawcze, Część III*, Narodowy Bank Polski, źródło (styczeń 2010):  
[http://www.nbportal.pl/r/euro/materialy\\_papierowe\\_pdf/raport\\_euro/re13n.pdf](http://www.nbportal.pl/r/euro/materialy_papierowe_pdf/raport_euro/re13n.pdf):79-109, 2009.
- Koop G., León-González R., Strachan R., *Efficient posterior simulation for cointegrated models with priors on the cointegration space*, *Econometric Reviews*, 29, 2010.
- Lenart Ł., *Procesy stochastyczne prawie okresowo skorelowane w badaniu cykliczności wskaźników makroekonomicznych*, *Rozprawa doktorska*, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kraków, 2010.
- Lenart Ł., Pipień M., *APC time series and subsampling in business fluctuations analysis: the case of industrial production in Poland*, unpublished manuscript, 2011.
- Luetkepohl H., *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2007.
- Makridakis S., Wheelwright S.C., Hyndman R.J., *Forecasting: Methods and Applications*, Wiley, New York 1998.
- Maravall A., del Ro A., *Time aggregation and the Hodrick-Prescott filter*, Banco de España — Servicio de Estudios Documento de Trabajo, n° 0108, 2001.
- Milas C., Rothman P.A., Dijk D., *Nonlinear Time Series Analysis of Business Cycles*, Elsevier, Amsterdam 2006.
- Muirhead R.J., *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley, New York 1982.
- Nelson Ch.R., Kang H., *Spurious periodicity in appropriately detrended time series*, *Econometrica*, 49(3):471-482, 1981.
- Osborn D.R., Smith J.P., *The performance of periodic autoregressive models in forecasting seasonal U.K. consumption*, *J Bus. Econ. Stat.*, 9:117-127, 1989.

- Osiewalski J., *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2001.
- Parzen E., Pagano M., *An approach to modeling sezonally stationary time-series*, J. Econometrics, 9:137-153, 1979.
- Politis D., Romano J., Wolf M., *Subsampling*, Springer-Verlag, New York 1999.
- Raftery A.E., Newton M.A., Satagopan J.M., Krivitsky P.N., *Estimating the integrated likelihood via posterior simulation using the harmonic mean identity*, Bayesian Statistics, pp. 1-45, 2007.
- Robert C.P., Casella G., *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, New York 2004.
- Shenk-Hoppé K.R., *Economic Growth and business Cycles: A Critical Comment on Detrending Time Series*, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 5(1):75-86, 2001.
- Sims C.A., *Macroeconomics and reality*, Econometrica, 48, 1980.
- Skrzypczyński P., *Analiza synchronizacji cykli koniunkturalnych w strefie euro*, Materiały i Studia Narodowego Banku Polskiego, Zeszyt nr 210, 2006.
- Skrzypczyński P., *Metody spektralne w analizie szeregów czasowych narzędziem badania wahań aktywności gospodarczej*, Materiały i Studia Narodowego Banku Polskiego, Zeszyt nr 252, 2010.
- Skrzypczyński P., *Wahania aktywności gospodarczej w Polsce i strefie euro*, Materiały i Studia Narodowego Banku Polskiego, Zeszyt nr 227, 2008.
- Strachan R.W., Inder B., *Bayesian analysis of the error correction model*, Journal of Econometrics, 123, 2004.
- Tierney L., *Markov chains for exploring posterior distributions*, Annals of Statistics, 22:1701-1762, 1994.
- Wróblewska J., *Modele i metody bayesowskiej analizy ko integracji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków 2010.
- Zellner A., *Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley, New York 1971.

## 2.5. ZAŁĄCZNIKI

### ZAŁĄCZNIK 2.1. STRUKTURA RAPORTU BADAWCZEGO – KOMPONENT MAKROEKONOMICZNY

- 1. Kluczowe zjawiska i procesy makroekonomiczne w polskiej gospodarce oraz w otoczeniu zewnętrznym – ujęcie syntetyczne stanu bieżącego**
  - 1.1. Sytuacja makroekonomiczna Polski
  - 1.2. Przegląd najważniejszych wydarzeń w gospodarce światowej
- 2. Diagnoza koniunktury w polskiej gospodarce oraz analiza perspektyw rozwojowych**
  - 2.1. Pozycja cykliczna polskiej gospodarki oraz główne trendy rozwojowe procesów gospodarczych w ujęciu zagregowanym
  - 2.2. Analiza koniunktury w sektorach polskiej gospodarki i tendencji rozwojowych branż
- 3. Wpływ potencjalnych zmian w otoczeniu makroekonomicznym na kondycję sektora przedsiębiorstw**
  - 3.1. Scenariusze szokowe w gospodarce i ich związki z kształtowaniem się stopy upadłości przedsiębiorstw
  - 3.2. Próba identyfikacji czynników wpływających na procesy tworzenia nowych miejsc pracy